Introduction to Sheaves on Manifolds

KNU Mathematics Intensive Lecture Series

Youngho Yoon
Chungbuk National University

August 19–24, 2024
Kyungpook National University, Daegu, Korea

Abstract

이 강의 시리즈는 대학원생들에게 다양체 위의 sheaf theory의 핵심 개념과 응용을 소개합니다. 우리는 sheaves와 presheaves의 기초, sheaf cohomology, constructible sheaves와 perverse sheaves, 그리고 Riemann-Hilbert correspondence를 다룰 것입니다. 이론적 통찰과 실제 예제를 통해 현대 수학에서 sheaf theory의 포괄적인 이해를 제공하는 데 중점을 둡니다.

강의는 범주론의 기초부터 시작하여 점진적으로 더 고급 주제로 나아갑니다. 각 장은 이론적 배경을 제공하고, 관련된 예제와 응용을 살펴봅니다. 이 강의를 통해 학생들은 sheaf theory의 강력함과 유연성을 이해하고, 이를 다양한 수학 분야에 적용할 수 있는 능력을 갖추게 될 것입니다.

Contents

머릿말: 인공지능 시대의 수학과 수학자의 역할

수학은 인류 문명의 근간을 이루는 학문으로, 수천 년간 우리의 논리적 사고와 문제 해결 능력을 키워왔습니다. 그러나 오늘날 우리는 새로운 도전에 직면해 있습니다. 인공지능(AI)이 급속도로 발전하면서, 수학 올림피아드 문제를 해결하고 복잡한 정리의 증명을 제시하는 등 전통적으로 인간 수학자들의 영역이라고 여겨졌던 분야에서도 놀라운 성과를 보이고 있습니다.

이러한 상황에서 우리는 자연스럽게 질문하게 됩니다. "과연 수학자들의 역할은 무엇인가?", "우리는 단순히 정리를 증명하고 문제를 푸는 것에만 집중해야 하는가?" 이 질문들에 대한 답은 결코 간단하지 않습니다. 그러나 이 질문들의 핵심에는 수학의 본질과 수학자의 창의성이 자리잡고 있습니다.

수학을 공부하다 보면, 우리는 종종 난해한 문제에 부딪힙니다. 기존의 방법으로는 해결되지 않는 문제들, 우리의 직관을 벗어나는 상황들을 마주하게 됩니다. 바로 이 지점에서 새로운 관점, 새로운 접근 방식의 필요성이 대두됩니다. 역사적으로 볼 때, 수학의 가장 큰 진보는 이러한 난관을 극복하는 과정에서 이루어졌습니다.

예를 들어, 복소수의 개념은 2차 방정식의 해를 구하는 과정에서 발생했습니다. 음수의 제곱근이라는, 당시로서는 '불가능한' 개념을 받아들임으로써 수학자들은 대수학의 지평을 넓혔습니다. 비유클리드 기하학은 유클리드의 평행선 공준을 증명하려는 시도가 실패하면서 탄생했습니다. 이러한 사례들은 문제 해결의 어려움이 어떻게 새로운 수학적 아이디어의 탄생으로 이어지는지를 보여줍니다.

이 강의에서 다룰 sheaf theory도 이러한 맥락에서 이해할 수 있습니다. Sheaf theory는 국소적인 정보를 전체적인 구조로 조합하는 방법을 제공합니다. 이는 단순한 기술적 도구가 아니라, 수학적 사고의 본질을 반영하는 이론입니다. 우리가 복잡한 문제를 해결할 때, 우리는 종종 그 문제를 더 작고 다루기 쉬운 부분들로 나누고, 그 부분들의 해결책을 종합하여 전체 문제의 해답을 찾습니다. Sheaf theory는 이러한 사고 과정을 정확하고 체계적으로 수학화한 것입니다.

그러나 이는 결코 문제 풀이나 정리의 증명이 중요하지 않다는 의미가 아닙니다. 오히려 그 반대입니다. 문제를 해결하고 정리를 증명하는 과정은 수학적 사고를 훈련하고 깊이 있는 이해를 얻는데 필수적입니다. 이러한 과정을 통해 우리는 수학적 직관을 키우고, 추상적인 개념을 구체화하며, 새로운 아이디어를 검증합니다. 따라서 여러분은 이 강의에서 제시되는 문제들과 증명 과제들을 열심히, 그리고 진지하게 다뤄야 합니다.

그러나 우리의 목표는 단순히 문제를 푸는 것에 그치지 않습니다. 우리는 문제를 풀면서 그 과정에서 얻은 통찰을 더 큰 맥락에서 이해하고, 그것이 어떻게 다른 개념들과 연결되는지, 그리고 어떻게 새로운 질문으로 이어지는지를 고민해야 합니다. 이것이 바로 창의적인 수학의 본질이며, AI 시대에 인간 수학자가 가져야 할 핵심적인 능력입니다.

이 관점에서 볼 때, 수학자의 역할은 단순히 문제를 푸는 것이 아니라, 문제를 바라보는 새로운 관점을 제시하고, 서로 다른 분야를 연결하는 개념적 틀을 만들어내는 것입니다. AI가 아무리 발전해도, 새로운 수학적 개념을 창조하고 그 개념들 사이의 깊은 연관성을 발견하는 것은 여전히 인간 수학자들의 영역일 것입니다.

이 강의에서 우리는 sheaf theory의 기본 개념부터 시작하여 그 응용에 이르기까지 폭넓게 다룰 것입니다. 그 과정에서 여러분은 이 이론이 어떻게 대수학, 기하학, 위상수학 등 다양한 수학 분야를 연결하는지, 그리고 어떻게 물리학이나 컴퓨터 과학 같은 다른 학문 분야에 영감을 주는지 보게 될 것입니다.

이 강의를 통해 여러분은 구체적인 문제 해결 능력과 추상적 사고 능력을 동시에 키우게 될 것입니다. Sheaf theory의 기본 개념을 배우고 관련된 문제들을 풀어나가면서, 동시에 이 이론이 어떻게 수학의 여러 분야를 연결하고 새로운 시각을 제공하는지를 이해하게 될 것입니다. 이러한 균형 잡힌 접근이야말로 현대 수학 교육의 핵심이며, 미래의 수학자들이 갖추어야 할 필수적인 요소입니다.

우리의 목표는 단순히 sheaf theory를 배우는 것이 아닙니다. 이 이론을 통해 우리는 수학적 사고의 본질을 더 깊이 이해하고, 복잡한 구조를 분석하고 종합하는 능력을 키우게 될 것입니다. 이러한 능력은 AI 시대에 더욱 중요해질 것입니다. 왜냐하면 이는 단순한 계산이나 패턴 인식을 넘어서는, 진정한 창의성과 통찰력의 영역이기 때문입니다.

수학은 인류의 지적 모험이며, 우리는 그 여정의 한 부분을 담당하고 있습니다. 이 강의를 통해 여러분이 수학의 아름다움과 힘을 느끼고, 앞으로의 수학 발전에 기여할 수 있는 영감을 얻기를 희망합니다. AI와 함께하는 새로운 시대에, 우리 수학자들은 더 높은 차원의 사고와 창의성을 추구해야 합니다. 그것이 바로 이 강의, 그리고 더 넓게는 현대 수학 교육의 진정한 목표일 것입니다.

자, 이제 sheaf theory의 세계로 함께 들어가 봅시다. 이 여정이 여러분에게 새로운 통찰과 영감을 줄 것이라 확신합니다.

Chapter 1

서론

1.1 Sheaf Theory의 탄생과 발전

20세기 초반, 수학자들은 다양한 수학 분야에서 유사한 구조와 패턴이 반복적으로 나타나는 것을 발견했습니다. 이런 유사성을 체계적으로 다룰 수 있는 통합된 언어의 필요성이 대두되었고, 이는 범주론(Category Theory)의 탄생으로 이어졌습니다[ML98].

Sheaf theory는 이러한 배경 속에서 탄생했습니다. 제2차 세계대전 중 프랑스 수학자 Jean Leray가 독일 포로수용소에서 연구를 하던 중 "faisceau" (sheaf의 프랑스어)라는 개념을 도입했습니다[Gra14]. Leray의 목표는 space의 local properties와 global properties를 연결하는 것이었습니다.

비고 1.1. *Leray의 연구는 수학사에서 흥미로운 일화를 제공합니다. 그는 포로 수용소에서 자신의 전문 분야인 유체역학 연구를 계속하면 전쟁에 도움이 될까 봐 우려하여, 대신 순수 수학인 대수위상수학을 연구했습니다. 이 결정이 결과적으로 현대 수학의 중요한 도구인 sheaf theory의 탄생으로 이어졌습니다. 이는 AI 시대에 수학자들이 가져야 할 창의적 사고와 새로운 관점의 중요성을 보여주는 좋은 예시입니다.*

Leray의 초기 아이디어는 다음과 같았습니다:

- 1940-1945년: Leray는 Oflag XVII에서 algebraic topology를 연구했습니다.
- 그는 "couverture" (covering)라는 개념을 도입하여 sheaf를 정의했습니다. 이는 현대적 정의와는 다르지만, 같은 아이디어를 담고 있었습니다.
- Leray의 초기 work는 fibration의 cohomology를 연구하는 데 중점을 두었습니다. 그는 base space와 fiber의 cohomology를 사용하여 total space의 cohomology를 계산하는 방법을 개발했습니다.
- 1945년: Leray가 "cohomology"라는 용어를 도입했습니다.

1950년대 초반, sheaf theory는 빠르게 발전하고 형식화되기 시작했습니다.

- 1950-1951년: Henri Cartan이 Leray의 아이디어를 발전시켜 현대적 의미의 sheaf 개념을 정립했습니다.
- Cartan은 École Normale Supérieure에서 세미나를 통해 이 개념을 소개했습니다. 이 세미나는 당시 젊은 수학자들에게 큰 영향을 미쳤고, 이후 프랑스 수학의 황금기를 이끄는 계기가 되었습니다.
- Cartan은 sheaf를 "espace étalé" (étale space)로 정의했습니다. 이는 현대의 sheaf 정의의 기초가 되었습니다.

- 1953년: Jean-Pierre Serre가 "Faisceaux Algébriques Cohérents" (FAC)를 발표했습니다. 이 논문은 algebraic geometry에 sheaf theory를 적용한 첫 번째 주요 작품입니다.
- 1955년: Roger Godement이 "Théorie des faisceaux"를 출판했습니다. 이 책은 sheaf theory의 첫 번째 체계적인 처리를 제공했습니다.

Henri Cartan, Jean-Pierre Serre, Alexander Grothendieck 등의 수학자들이 이 이론을 더욱 발전시켰습니다[KS05, Gro60]. 특히 Grothendieck의 work는 sheaf theory와 대수기하학을 완전히 새로운 차원으로 끌어올렸습니다[Har77].

- 1960년: Alexander Grothendieck이 "Éléments de géométrie algébrique" (EGA)의 출판을 시작했습니다. 이 대작은 sheaf theory를 사용하여 algebraic geometry를 완전히 재구성했습니다.
- Grothendieck은 scheme의 개념을 도입했습니다. Scheme은 locally ringed space의 특별한 경우로, sheaf of rings를 사용하여 정의됩니다.
- 1963-1964년: Grothendieck과 그의 학생들이 "Théorie des topos et cohomologie étale des schémas" (SGA4)를 발표했습니다. 이는 topos theory의 기초를 마련했습니다.

1.2 Sheaf Theory의 핵심 아이디어

Sheaf theory의 핵심 아이디어는 "local-to-global" 원리입니다. 이는 국소적으로 정의된 정보들을 어떻게 전체적인 정보로 조합할 수 있는지를 다룹니다. 이 아이디어는 AI가 하기 어려운 창의적 사고의 좋은 예시입니다.

예 1.2 (미분다양체의 함수)**.** *미분다양체 M 위에서 정의된 함수를 생각해봅시다. 우리는 종종 M의 작은 부분들(예: 좌표계가 정의된 영역)에서 함수를 정의하고, 이들을 "붙여서" 전체 M 위의 함수를 만듭니다. 이 과정에서 우리는:*

- *각 부분에서 정의된 함수들이 겹치는 영역에서 일치하는지 확인합니다.*
- *일치한다면, 이들을 하나의 전체 함수로 "붙입니다".*

이 과정이 바로 sheaf theory가 다루는 핵심적인 아이디어입니다. 이는 복잡한 구조를 이해하기 위해 부분들을 분석하고 다시 조합하는 인간의 사고 과정을 반영합니다.

이러한 아이디어는 다양한 수학 분야에서 나타나며, sheaf theory는 이를 체계적으로 다루는 틀을 제공합니다[Dim04].

1.3 Sheaf Theory의 중요성

Sheaf theory가 현대 수학에서 중요한 이유는 다음과 같습니다:

1. **Local-to-Global Principle**: Sheaf theory는 local information을 global information으로 변환하는 체계적인 방법을 제공합니다.
2. **Unification**: 다양한 수학 분야의 아이디어를 통합하는 언어 역할을 합니다. 이는 AI 시대에 수학자들이 가져야 할 "서로 다른 분야를 연결하는 개념적 틀을 만들어내는" 능력의 좋은 예시입니다.
3. **Generalization**: 기존의 많은 수학적 개념들을 일반화하고 확장합니다.
4. **Flexibility**: Sheaves는 매우 유연한 개념으로, 다양한 상황에 적용 가능합니다.

5. **Powerful Techniques**: Spectral sequences, derived categories 등의 강력한 기술을 제공합니다[GM13].
6. **Bridge between Algebra and Geometry**: 대수적 구조와 기하학적 구조 사이의 다리 역할을 합니다.
7. **Cohomological Approach**: Cohomology를 통해 기하학적 대상의 전역적 성질을 연구할 수 있게 해줍니다[Ive86].

1.4 실제 응용 사례

Sheaf theory는 순수 수학뿐만 아니라 다양한 분야에서 응용됩니다:

- **물리학**: 양자장론에서 장(field)을 sheaf로 모델링합니다.
- **컴퓨터 과학**: 분산 시스템의 모델링에 sheaf를 사용합니다.
- **데이터 과학**: Topological data analysis에서 persistence homology를 sheaf 관점에서 해석합니다.
- **신경과학**: 뇌의 정보 처리 과정을 sheaf model로 설명하려는 시도가 있습니다.

이러한 응용 사례들은 sheaf theory가 단순히 추상적인 수학 이론이 아니라, 실제 세계의 복잡한 현상을 이해하는 데 도움을 주는 강력한 도구임을 보여줍니다.

1.5 강의 개요

이 강의 시리즈는 다음과 같은 주제들을 다룰 것입니다:

1. 서론 (본 장)
2. 범주론의 기초
3. Presheaves와 Sheaves
4. Sheaf Operations
5. Sheaf Cohomology의 기초
6. Čech Cohomology와 Derived Functors
7. Constructible Sheaves
8. Perverse Sheaves: 소개
9. Perverse Sheaves: 예제와 응용
10. The Riemann-Hilbert Correspondence
11. Sheaf Theory의 응용

각 장에서는 해당 주제의 motivation을 제시하고, 새로운 개념이나 정의를 도입할 때마다 왜 그 개념이 필요한지 설명할 것입니다. 또한, 각 개념이나 정리에 대해 구체적인 예시와 반례를 함께 제시하여 이해를 돕겠습니다.

1.6 결론

Sheaf theory는 현대 수학의 핵심적인 도구로, 대수기하학, 위상수학, 미분기하학 등 다양한 분야에서 중요한 역할을 합니다. 이 강의를 통해 여러분은 sheaf theory의 기본 개념부터 고급 응용까지 배우게 될 것입니다. 이를 통해 수학의 다양한 분야를 연결하는 강력한 언어를 습득하게 될 것입니다.

AI 시대에 수학자의 역할은 더욱 중요해지고 있습니다. Sheaf theory를 학습하면서, 여러분은 복잡한 구조를 분석하고 종합하는 능력, 추상적 개념을 만들어내는 능력, 그리고 서로 다른 분야를 연결하는 능력을 키울 수 있을 것입니다. 이러한 능력들은 AI가 쉽게 모방하기 어려운, 인간 수학자의 고유한 강점입니다.

다음 장에서는 sheaf theory를 이해하는 데 필요한 범주론의 기초 개념들을 살펴보겠습니다.

1.7 현재 연구 동향

- **Higher Category Theory와의 관계**: $(\infty, 1)$-categories를 사용한 sheaf theory의 일반화에 대한 연구가 진행 중입니다.
- **Derived Algebraic Geometry**: Sheaves of differential graded algebras나 E_∞-algebras에 대한 연구가 활발히 이루어지고 있습니다.
- **Motives Theory**: Grothendieck의 motive 이론과 sheaf theory의 관계에 대한 연구가 진행 중입니다. 이는 대수기하학의 여러 코호몰로지 이론을 통합하려는 시도입니다.
- **Applied Sheaf Theory**: 데이터 과학, 신경과학, 양자 컴퓨팅 등 다양한 분야에 sheaf theory를 적용하는 연구가 증가하고 있습니다.
- **Perverse Sheaves의 일반화**: 다양한 대수적, 기하학적 맥락에서 perverse sheaves의 개념을 일반화하려는 시도가 있습니다.
- **Sheaves in Homotopy Theory**: Homotopy theory에서 sheaves의 역할에 대한 연구가 진행 중입니다. 특히 ∞-toposes와의 관계가 주목받고 있습니다.

이러한 개방형 문제들은 sheaf theory가 여전히 활발한 연구 분야이며, 새로운 아이디어와 접근 방식이 계속해서 필요함을 보여줍니다. AI 시대에 수학자들은 이러한 문제들에 대해 창의적인 접근을 시도하고, 새로운 연결고리를 발견하며, 때로는 완전히 새로운 수학적 개념을 만들어내는 역할을 수행해야 할 것입니다.

Chapter 2

범주론의 기초

2.1 범주론의 탄생과 발전

범주론(Category theory)은 20세기 중반에 수학의 여러 분야에서 발견된 유사한 구조와 패턴을 통합하려는 노력에서 탄생했습니다 [ML98]. 1940년대에 Samuel Eilenberg과 Saunders Mac Lane이 처음으로 범주론을 소개했는데, 그들의 주요 목표는 대수적 위상수학에서 발견된 유사성을 설명하는 것이었습니다.

범주론은 수학적 구조들 사이의 관계를 추상화하고 일반화하는 강력한 도구로 발전했습니다. 이는 단순히 "수학의 수학"으로 불리기도 하며, 수학의 여러 분야를 연결하는 공통 언어 역할을 합니다.

2.2 Category의 정의

범주론의 핵심 개념인 category를 이해하기 위해, 먼저 그 필요성과 동기를 살펴보겠습니다. 수학에서는 종종 비슷한 구조를 가진 대상들을 다룹니다. 예를 들어, 집합과 함수, 위상공간과 연속함수, 그룹과 준동형사상 등이 있습니다. 이러한 구조들 사이의 공통점을 추상화하여 일반적인 틀을 제공하는 것이 category의 역할입니다.

정의 2.1 (Category)**.** *Category $\mathcal{C}$는 다음으로 구성됩니다:*

- *Objects의 집합 $Ob(\mathcal{C})$*
- *각 순서쌍의 objects (A, B)에 대한 morphisms의 집합 $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$*
- *각 object A에 대한 identity morphism $id_A \in Hom_{\mathcal{C}}(A, A)$*
- *Morphisms의 합성 연산 $\circ : Hom_{\mathcal{C}}(B, C) \times Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \to Hom_{\mathcal{C}}(A, C)$*

다음 조건을 만족해야 합니다:

- *(결합법칙) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ for $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$*
- *(항등원) $f \circ id_A = f = id_B \circ f$ for $f : A \to B$*

이 정의는 매우 추상적으로 보일 수 있지만, 실제로 많은 수학적 구조들이 이 정의에 부합합니다. 다음 섹션에서 구체적인 예시들을 살펴보겠습니다.

2.3 Category의 예시

Category의 개념을 더 잘 이해하기 위해, 몇 가지 중요한 예시들을 살펴보겠습니다. 이 예시들은 category의 정의가 어떻게 다양한 수학적 구조들을 포괄할 수 있는지 보여줍니다.

예 2.2 (Set)**. Set***: 집합들의 category*

- *Objects: 모든 집합들*
- *Morphisms: 함수들*
- *Identity: 항등함수*
- *Composition: 함수의 합성*

이 category는 가장 기본적이고 직관적인 예시입니다. 집합론의 기본 개념들을 category의 언어로 표현한 것입니다.

예 2.3 (Grp)**. Grp***: 군들의 category*

- *Objects: 모든 군들*
- *Morphisms: 군 준동형사상들*
- *Identity: 항등 준동형사상*
- *Composition: 준동형사상의 합성*

이 category는 대수학의 주요 대상인 군들을 다룹니다. 군 사이의 관계를 준동형사상으로 표현하는 것이 특징입니다.

예 2.4 (Top)**. Top***: 위상공간들의 category*

- *Objects: 모든 위상공간들*
- *Morphisms: 연속함수들*
- *Identity: 항등 연속함수*
- *Composition: 연속함수의 합성*

위상수학의 기본 대상인 위상공간들을 category로 표현한 것입니다. 연속성이라는 개념이 morphism으로 표현됩니다.

예 2.5 (Vect_K)**.** $\mathbf{Vect}_K$*: K 위의 벡터공간들의 category*

- *Objects: K 위의 모든 벡터공간들*
- *Morphisms: 선형 변환들*
- *Identity: 항등 선형 변환*
- *Composition: 선형 변환의 합성*

선형대수학의 주요 대상인 벡터공간들을 다루는 category입니다. 여기서 K는 기저체(base field)를 나타냅니다.

이러한 예시들은 category가 단순히 추상적인 개념이 아니라 실제 수학의 여러 분야를 통합적으로 이해할 수 있게 해주는 도구임을 보여줍니다.

2.4 특별한 Category: One Object Category와 Group

Category의 개념은 매우 일반적이어서 때로는 예상치 못한 구조도 category로 해석할 수 있습니다. 특히 흥미로운 예시 중 하나는 하나의 대상만을 가진 category입니다.

예 2.6 (One Object Category and Group). *하나의 대상만을 가진 category는 군과 밀접한 관련이 있습니다:*

- *카테고리 $\mathcal{C}$가 하나의 대상 X만을 가집니다.*
- *$Hom(X, X)$의 모든 원소(자기 자신으로의 모든 morphism)를 생각합니다.*
- *이 morphism들의 합성이 군의 연산이 됩니다.*
- *Identity morphism이 군의 항등원이 됩니다.*
- *각 morphism이 역원을 가질 때, 이 카테고리는 군과 동형이 됩니다.*

이러한 관점은 군론과 카테고리 이론을 연결짓는 중요한 예시입니다.

이 예시는 category의 개념이 얼마나 유연하고 강력한지를 보여줍니다. 하나의 대상만을 가진 category를 통해 군이라는 전통적인 대수적 구조를 새로운 시각에서 이해할 수 있게 됩니다.

2.5 Functor의 정의와 예시

Category들 사이의 관계를 이해하는 것은 범주론의 핵심 목표 중 하나입니다. 이를 위해 도입된 개념이 바로 functor입니다. Functor는 한 category에서 다른 category로의 "morphism"으로 생각할 수 있습니다.

정의 2.7 (Functor). *Functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$는 category $\mathcal{C}$에서 $\mathcal{D}$로의 "morphism"입니다:*

- *각 object $A \in \mathcal{C}$에 대해 $F(A) \in \mathcal{D}$를 대응시킵니다.*
- *각 morphism $f : A \to B$ in $\mathcal{C}$에 대해 $F(f) : F(A) \to F(B)$ in $\mathcal{D}$를 대응시킵니다.*

다음 조건을 만족해야 합니다:

- $F(id_A) = id_{F(A)}$ *for all* $A \in \mathcal{C}$
- $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ *for all composable morphisms* f *and* g *in* $\mathcal{C}$

Functor의 개념을 더 잘 이해하기 위해, 몇 가지 중요한 예시를 살펴보겠습니다.

예 2.8 (Forgetful Functor). $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$

- *각 군을 그 underlying set에 대응시킵니다.*
- *각 군 준동형사상을 단순히 함수로 간주합니다.*

이 functor는 군의 구조를 "잊어버리고" 단순히 집합으로 보는 것입니다. 이는 수학에서 자주 사용되는 "망각" 과정을 형식화한 것입니다.

예 2.9 (Powerset Functor). $\mathcal{P} : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$

- *각 집합 X를 그 멱집합 $\mathcal{P}(X)$에 대응시킵니다.*
- *함수 $f : X \to Y$를 $\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$에 대응시킵니다. 여기서 $\mathcal{P}(f)(A) = \{f(x) : x \in A\}$ for $A \subseteq X$.*

이 functor는 집합론의 기본 연산인 멱집합 구성을 category의 언어로 표현한 것입니다.

예 2.10 (Fundamental Group Functor). $\pi_1 : \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Grp}$

- *각 pointed 위상공간* (X, x_0)*을 그 기본군* $\pi_1(X, x_0)$*에 대응시킵니다.*
- *각 based 연속함수* $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$*를 induced 준동형사상* $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$*에 대응시킵니다.*

이 functor는 위상수학의 중요한 불변량인 기본군을 대수적 대상으로 변환합니다. 이는 대수적 위상수학의 핵심 아이디어를 반영합니다.

예 2.11 (Hom Functor). $Hom_{\mathcal{C}}(A, -) : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ *for fixed* $A \in \mathcal{C}$

- *각 object* $B \in \mathcal{C}$*를* $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$*에 대응시킵니다.*
- *각 morphism* $f : B \to C$*를* $f_* : Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \to Hom_{\mathcal{C}}(A, C)$*에 대응시킵니다. 여기서* $f_*(g) = f \circ g$ *for* $g \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$.

Hom functor는 category theory에서 매우 중요한 역할을 합니다. 이는 Yoneda lemma와 같은 깊은 결과들의 기초가 됩니다.

이러한 예시들은 functor가 어떻게 서로 다른 수학적 구조들 사이의 관계를 포착하는지 보여줍니다. Functor를 통해 우리는 한 category의 정보를 다른 category로 전달할 수 있으며, 이는 수학적 구조들 사이의 깊은 연관성을 발견할 수 있게 됩니다.

2.6 Natural Transformation의 정의와 예시

Functor들 사이의 관계를 이해하는 것도 중요합니다. 이를 위해 도입된 개념이 natural transformation입니다. Natural transformation은 두 functor 사이의 "morphism"으로 생각할 수 있습니다.

정의 2.12 (Natural Transformation). *두 functors* $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *사이의 natural transformation* $\eta : F \Rightarrow G$*는 각 object* $A \in \mathcal{C}$*에 대한 morphism* $\eta_A : F(A) \to G(A)$ *in* $\mathcal{D}$*의 집합으로, 다음 조건을 만족합니다:*

모든 morphism $f : A \to B$ *in* $\mathcal{C}$*에 대해 다음 diagram이 commute 합니다:*

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(B) \arrow[r, "\eta_B"'] & G(B)
\end{tikzcd}$$

이 정의는 매우 추상적으로 보일 수 있지만, 실제로 많은 수학적 상황에서 자연스럽게 등장합니다. 몇 가지 중요한 예시를 통해 이 개념을 더 잘 이해해 보겠습니다.

예 2.13 (Identity to Squaring). $F, G : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$*를 다음과 같이 정의합니다:*

- $F(X) = X$ *(identity functor)*
- $G(X) = X \times X$ *(product with itself)*

Natural transformation $\eta : F \Rightarrow G$*를 각 집합* X*에 대해* $\eta_X : X \to X \times X$, $\eta_X(x) = (x, x)$*로 정의할 수 있습니다.*

이 예시는 집합의 "대각선 사상"을 natural transformation으로 표현한 것입니다. 이는 집합론에서 자주 등장하는 구성을 category theory의 언어로 형식화한 것입니다.

예 2.14 (Determinant). $\det : M_n \Rightarrow Id$ *(여기서* M_n*과* Id*는* **Ring***에서* **Ring***으로의 functors)*

- *$M_n(R)$: R 위의 $n \times n$ 행렬들의 환*
- *$Id(R)$: R 자신 (항등 함자)*
- *각 환 R에 대해, $\eta_R : M_n(R) \to R$는 행렬의 행렬식을 계산합니다.*
- *예: $R = \mathbb{Z}$일 때, $\eta_{\mathbb{Z}} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$*

이 natural transformation은 다음과 같은 성질을 갖습니다:

- *곱셈 보존: $\eta_R(AB) = \eta_R(A)\eta_R(B)$ for $A, B \in M_n(R)$*
- *단위원 보존: $\eta_R(I_n) = 1_R$ (여기서 I_n은 $n \times n$ 항등행렬)*

이 예시는 선형대수학의 중요한 개념인 행렬식을 natural transformation으로 표현한 것입니다. 이를 통해 행렬식의 여러 성질들을 category theory의 관점에서 이해할 수 있습니다.

이러한 예시들은 natural transformation이 어떻게 수학의 다양한 분야에서 등장하는 개념들을 통합적으로 이해할 수 있게 해주는지 보여줍니다.

2.7 Universal Property

범주론에서 매우 중요한 개념 중 하나는 universal property입니다. 이 개념은 수학적 대상을 그 대상과 다른 대상들 사이의 관계로 특징짓는 방법을 제공합니다.

정의 2.15 (Universal Property)**.** *Universal property는 주로 "모든 에 대해 유일한 가 존재한다"는 형태로 표현됩니다. 이는 대상 자체의 내부 구조보다는 그 대상이 다른 대상들과 어떻게 상호작용하는지에 초점을 맞춥니다.*

Universal property의 중요성은 다음과 같습니다:

- 수학적 대상을 그 관계를 통해 유일하게 특징짓습니다.
- 다양한 수학적 구조를 통일된 방식으로 이해할 수 있게 해줍니다.
- 추상적인 개념을 구체적인 구성과 연결짓습니다.

Universal property의 개념을 더 잘 이해하기 위해, 몇 가지 중요한 예시를 살펴보겠습니다.

예 2.16 (Direct Sum (Coproduct))**.** *벡터 공간 V와 W의 직접합 $V \oplus W$는 다음 universal property를 만족합니다:*

- *주입 (injections) $i_V : V \to V \oplus W$와 $i_W : W \to V \oplus W$가 존재합니다.*
- *임의의 벡터 공간 X와 선형 사상 $f : V \to X$, $g : W \to X$에 대해,*
- *유일한 선형 사상 $h : V \oplus W \to X$가 존재하여 다음을 만족합니다:*

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "i_V"] \arrow[d, "f"'] & V \oplus W \arrow[dl, dashed, "h"] \\
X & W \arrow[l, "g"] \arrow[u, "i_W"']
\end{tikzcd}$$

이 예시는 직접합(또는 더 일반적으로 coproduct)의 universal property를 보여줍니다. 이 property는 직접합을 유일하게 특징짓습니다.

예 2.17 (Product)**.** *집합 A와 B의 곱 $A \times B$는 다음 universal property를 만족합니다:*

- *사영 (projections) $\pi_A : A \times B \to A$와 $\pi_B : A \times B \to B$가 존재합니다.*
- *임의의 집합 X와 함수 $f : X \to A$, $g : X \to B$에 대해,*
- *유일한 함수 $h : X \to A \times B$가 존재하여 다음을 만족합니다:*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "\pi_A"] \arrow[r, "\pi_B"'] & B \end{tikzcd}$$

이 예시는 곱(product)의 universal property를 보여줍니다. 이 property는 곱을 유일하게 특징짓습니다.

Universal property는 수학의 여러 분야에서 중요한 역할을 합니다. 특히 범주론에서는 limit와 colimit와 같은 중요한 개념들이 universal property를 통해 정의됩니다. 이러한 접근 방식은 서로 다른 수학적 구조들 사이의 깊은 연관성을 발견하는 데 도움을 줍니다.

2.8 Yoneda Lemma

범주론의 가장 깊고 중요한 결과 중 하나는 Yoneda lemma입니다. 이 정리는 object가 다른 object들과의 관계로 완전히 결정됨을 보여주며, 이는 수학적 대상을 그 "관계"를 통해 이해할 수 있게 해줍니다.

정리 2.18 (Yoneda Lemma)**.** *$\mathcal{C}$를 locally small category, A를 $\mathcal{C}$의 object, 그리고 $F : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$를 functor라고 합시다. 그러면 다음과 같은 자연스러운 bijection이 존재합니다:*
$Nat(Hom_{\mathcal{C}}(-, A), F) \cong F(A)$
여기서 Nat은 natural transformations의 집합을 나타냅니다.

이 정리의 의미와 중요성을 이해하기 위해, 몇 가지 응용 예를 살펴보겠습니다.

예 2.19 (Group의 Characterization)**.** *$\mathbf{Grp}$에서, 다음이 성립합니다:*

$$Nat(Hom_{\mathbf{Grp}}(-, G), Hom_{\mathbf{Grp}}(-, H)) \cong Hom_{\mathbf{Grp}}(G, H)$$

이는 군 G가 다른 모든 군들과의 준동형사상들로 완전히 결정됨을 의미합니다.
이 결과는 군을 그 "관계"를 통해 이해할 수 있음을 보여줍니다. 즉, 어떤 군이 다른 모든 군들과 어떻게 상호작용하는지 알면, 그 군의 모든 정보를 알 수 있다는 것입니다.

예 2.20 (Representable Functor)**.** *Functor $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$가 representable하다는 것은 어떤 $A \in \mathcal{C}$에 대해 $F \cong Hom_{\mathcal{C}}(-, A)$임을 의미합니다. Yoneda lemma는 이러한 A가 존재한다면 유일함을 보장합니다.*
이는 수학에서 자주 등장하는 "universal property"의 개념과 밀접한 관련이 있습니다. 많은 수학적 구조들이 이러한 universal property를 통해 정의되며, Yoneda lemma는 이러한 정의가 well-defined임을 보장합니다.

Yoneda lemma는 매우 추상적이지만, 그 응용은 수학의 여러 분야에 걸쳐 있습니다. 이는 수학적 대상들을 그들의 "관계"를 통해 이해하는 새로운 방법을 제공하며, 이는 종종 전통적인 접근 방식보다 더 깊은 통찰을 제공합니다.

2.9 Abelian Category

수학의 여러 분야, 특히 대수학과 위상수학에서는 덧셈 구조를 가진 대상들을 다루는 경우가 많습니다. 이러한 상황을 일반화한 것이 abelian category입니다.

정의 2.21 (Abelian Category)**.** *Abelian category는 다음 속성들을 가진 category입니다:*

- *모든 Hom-set이 abelian group 구조를 가집니다.*
- *Zero object가 존재합니다. (즉, initial object와 terminal object가 동일)*
- *모든 유한한 products와 coproducts가 존재합니다.*
- *모든 morphism에 대해 kernel과 cokernel이 존재합니다.*
- *모든 monomorphism은 어떤 morphism의 kernel이고, 모든 epimorphism은 어떤 morphism의 cokernel입니다.*

이 정의는 매우 추상적으로 보이지만, 실제로 많은 중요한 수학적 구조들이 abelian category의 예시가 됩니다. 몇 가지 중요한 예를 살펴보겠습니다.

예 2.22 (Ab)**. Ab***: 아벨 군들의 category*

- *Objects: 모든 아벨 군들*
- *Morphisms: 군 준동형사상들*
- *Zero object: 단위원만 있는 군*
- *Kernel: 준동형사상의 핵*
- *Cokernel: 준동형사상의 공핵*

이는 가장 기본적인 abelian category의 예시입니다. 모든 abelian category의 원형이 되는 구조입니다.

예 2.23 (Mod_R)**.** $\mathbf{Mod}_R$*: R-modules의 category (R은 환)*

- *Objects: 모든 R-modules*
- *Morphisms: R-module 준동형사상들*
- *Zero object:* 0 *module*
- *Kernel과 Cokernel:* **Ab***와 유사하게 정의*

이 예시는 대수학, 특히 선형대수학과 밀접한 관련이 있습니다. 벡터 공간은 이 category의 특별한 경우입니다.

Abelian category의 중요성은 그것이 제공하는 통일된 관점에 있습니다. 많은 수학적 구조들이 abelian category의 틀 안에서 연구될 수 있으며, 이를 통해 서로 다른 분야의 결과들을 통합적으로 이해할 수 있게 됩니다.

2.10 Derived Category

현대 수학, 특히 대수기하학과 위상수학에서는 종종 복잡한 대수적 구조들을 다루어야 합니다. 이러한 복잡성을 다루기 위해 도입된 개념이 derived category입니다.

정의 2.24 (Derived Category)**.** *Abelian category $\mathcal{A}$의 derived category $D(\mathcal{A})$는 다음과 같이 구성됩니다:*

- *Objects: $\mathcal{A}$의 complexes*
- *Morphisms: Chain maps의 localization (quasi-isomorphisms를 isomorphisms로 만듦)*

Derived category의 구성을 이해하기 위해, 몇 가지 중요한 개념들을 살펴보겠습니다.

- **Complex**: 대상들의 연쇄와 그 사이의 morphism들로 이루어진 구조
$$\cdots \to A_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} A_n \xrightarrow{d_n} A_{n+1} \to \cdots$$
여기서 $d_n \circ d_{n-1} = 0$입니다. (즉, $\mathrm{im}(d_{n-1}) \subseteq \ker(d_n)$)
- **Chain map**: 두 complex 사이의 morphism. 모든 square가 commute해야 합니다.
- **Quasi-isomorphism**: Complex들 사이의 chain map으로, 모든 차수에서 cohomology의 isomorphism을 유도하는 것
- **Localization**: 특정 morphism들 (여기서는 quasi-isomorphisms)을 형식적으로 역원을 갖도록 만드는 과정
- **Cohomology**: Complex $A_\bullet$의 n번째 cohomology는
$$H^n(A_\bullet) = \ker(d_n)/\mathrm{im}(d_{n-1})$$

Derived category는 다음과 같은 이유로 현대 수학에서 중요한 역할을 합니다:

- Derived category는 homological algebra를 더 자연스럽게 다룰 수 있게 해줍니다.
- 복잡한 대수적, 기하학적 대상들을 더 유연하게 다룰 수 있게 합니다.
- Sheaf theory, 특히 perverse sheaves와 D-modules 이론에서 중요한 역할을 합니다.
- 대수기하학, 표현론 등 현대 수학의 여러 분야에서 핵심적인 도구로 사용됩니다.

Derived category의 구체적인 예시를 통해 이 개념을 더 잘 이해해 보겠습니다.

예 2.25 (D(Ab))**.** *$D(\mathbf{Ab})$: 아벨 군들의 derived category*

- *Objects: 아벨 군들의 복합체 (chain complexes)*
- *Morphisms: 준동형사상의 복합체들 사이의 호모토피 클래스*
- *응용: 그룹 코호몰로지, 호몰로지 대수 등*

이 예시는 대수적 위상수학에서 중요한 역할을 합니다. 특히, 그룹의 코호몰로지를 계산하는 데 유용합니다.

예 2.26 ($\mathrm{D}(\mathrm{Mod}_R)$)**.** *$D(\mathbf{Mod}_R)$: R-modules의 derived category*

- *Objects: R-modules의 복합체*
- *Morphisms: R-module 준동형사상의 복합체들 사이의 호모토피 클래스*
- *응용: 대수기하학, 복소기하학 등*

이 예시는 대수기하학에서 특히 중요합니다. 예를 들어, 기하학적 대상의 코호몰로지를 계산하는 데 사용됩니다.

2.11 범주론과 Sheaf Theory

범주론은 sheaf theory의 기초가 되는 언어를 제공합니다. Sheaf theory의 주요 개념들은 범주론의 언어로 자연스럽게 표현됩니다.

- Presheaf: $\mathbf{Open}(X)^{\mathrm{op}}$에서 **Set** (또는 **Ab**)로의 functor
- Sheaf: 특정 조건을 만족하는 presheaf
- Sheaf morphism: 두 presheaf functors 사이의 natural transformation
- Global sections functor: $\mathbf{Sh}(X) \to \mathbf{Ab}$
- Sheafification: presheaves의 category에서 sheaves의 category로의 functor

이러한 개념들은 다음 장에서 더 자세히 다룰 것입니다. 여기서는 범주론적 관점에서 이들을 어떻게 이해할 수 있는지 간단히 살펴보겠습니다.

예 2.27 (Continuous Functions Sheaf)**.** *X를 위상공간이라 할 때, 연속함수들의 sheaf $\mathcal{C}_X$:*

- *$U \subseteq X$ 열린집합에 대해, $\mathcal{C}_X(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ is continuous}\}$*
- *Restriction maps: 함수의 자연스러운 제한*
- *이는 $\mathbf{Open}(X)^{op} \to \mathbf{Set}$의 functor*

이 예시는 위상공간 위의 연속함수라는 직관적인 개념을 범주론의 언어로 형식화한 것입니다.

예 2.28 (Locally Constant Sheaf)**.** *X 위의 locally constant sheaf $\mathcal{F}$:*

- *각 점 $x \in X$에 대해 충분히 작은 열린근방 U가 존재하여 $\mathcal{F}|_U$가 constant sheaf*
- *이는 X의 위상 정보를 대수적 구조로 인코딩*

이 예시는 위상공간의 국소적 구조를 대수적 대상으로 변환하는 방법을 보여줍니다. 이는 대수적 위상수학의 핵심 아이디어 중 하나입니다.

2.12 결론

범주론은 수학의 여러 분야를 통합하는 강력한 언어를 제공합니다. 우리는 이 장에서 다음과 같은 주요 개념들을 살펴보았습니다:

- Category: 수학적 구조들을 추상화하는 기본 단위
- Functor: Category들 사이의 관계를 표현하는 도구
- Natural Transformation: Functor들 사이의 관계를 표현하는 도구
- Yoneda Lemma: 대상을 그 관계를 통해 이해하는 방법
- Abelian Category: 덧셈 구조를 가진 대상들을 다루는 category
- Derived Category: 복잡한 대수적 구조를 다루는 도구

이러한 개념들은 sheaf theory를 이해하고 응용하는 데 필수적입니다. 범주론은 추상화의 도구를 넘어 새로운 수학적 통찰을 얻는 방법을 제공합니다.

범주론이 제공하는 추상적 사고와 통합적 시각은 AI 시대에 수학자들이 가져야 할 중요한 능력입니다. 복잡한 수학적 구조를 이해하고 분석하는 이러한 도구들은 현대 수학의 발전에 핵심적인 역할을 하고 있습니다.

다음 장에서는 이러한 범주론적 개념들을 바탕으로 presheaf와 sheaf, 그리고 sheafification에 대해 자세히 알아보겠습니다.

Chapter 3

Presheaves와 Sheaves

3.1 Introduction

이전 장에서 우리는 범주론의 기본 개념들을 살펴보았습니다. 이제 이러한 개념들을 바탕으로 sheaf theory의 핵심 개념인 presheaf와 sheaf를 정의하고 이해해보겠습니다.

Presheaf와 sheaf의 개념은 "local-to-global" 원리를 수학적으로 정확하게 표현하는 방법을 제공합니다. 이 개념들은 국소적인 정보를 어떻게 전역적인 정보로 조합할 수 있는지를 설명하며, 이는 많은 수학 분야에서 중요한 역할을 합니다[KS90].

3.2 Motivation: 국소적 정보의 전역화

20세기 초반, 수학자들은 다양한 분야에서 비슷한 패턴을 발견했습니다. 예를 들어, 미분기하학에서 다양체의 성질을 연구할 때, 국소적으로 정의된 정보들을 어떻게 전체 다양체에 대한 정보로 조합할 수 있을까요? 또는 대수기하학에서 대수다양체의 성질을 이해하기 위해 국소적인 대수적 정보들을 어떻게 활용할 수 있을까요?

이러한 문제들을 해결하기 위해, 우리는 국소적 정보를 체계적으로 관리하고 조합할 수 있는 수학적 도구가 필요했습니다. 이것이 바로 presheaf와 sheaf의 개념이 탄생한 배경입니다[Gra14].

예 3.1 (미분다양체의 함수)**.** *미분다양체 M 위에서 정의된 함수를 생각해봅시다. 우리는 종종 M의 작은 부분들(예: 좌표계가 정의된 영역)에서 함수를 정의하고, 이들을 "붙여서" 전체 M 위의 함수를 만듭니다. 이 과정에서 우리는:*

- *각 부분에서 정의된 함수들이 겹치는 영역에서 일치하는지 확인합니다.*
- *일치한다면, 이들을 하나의 전체 함수로 "붙입니다".*

이 과정이 바로 sheaf theory가 다루는 핵심적인 아이디어입니다.

3.3 Presheaves: 국소적 정보의 체계화

먼저 presheaf의 개념부터 시작해보겠습니다. Presheaf는 국소적 정보를 저장하는 구조로, functor를 이용해 정의됩니다.

정의 3.2 (Presheaf)**.** *위상공간 X에 대해, presheaf $\mathcal{F}$는 다음과 같은 데이터로 구성됩니다:*

- *Functor $\mathcal{F} : \mathbf{Open}(X)^{op} \to \mathbf{Set}$ (또는 $\mathbf{Ab}$, $\mathbf{Ring}$ 등)*
- *각 열린집합 $U \subseteq X$에 대해 집합 (또는 group, ring 등) $\mathcal{F}(U)$를 대응시킵니다.*
- *각 inclusion $V \subseteq U$에 대해 restriction map $\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$를 대응시킵니다.*
- *ρ_{UU}는 identity map이며, $W \subseteq V \subseteq U$일 때 $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$입니다.*

이 정의에서 $\mathbf{Open}(X)^{\mathrm{op}}$는 X의 열린집합들의 category의 opposite category입니다. 이는 inclusion이 "반대 방향"으로 작동함을 나타냅니다.

예 3.3 (연속함수의 presheaf). *위상공간 X에 대해, 각 열린집합 $U \subseteq X$에 U 위에서 정의된 연속 실수값 함수들의 집합 $\mathcal{C}(U)$를 대응시키는 presheaf $\mathcal{C}$를 생각해봅시다. Restriction map은 함수의 자연스러운 제한으로 정의됩니다.*

Presheaf의 개념은 국소적 정보를 체계적으로 관리할 수 있게 해주지만, 이것만으로는 부족합니다. 우리는 이 정보들을 어떻게 "붙일" 수 있는지에 대한 규칙이 필요합니다. 이것이 바로 sheaf의 개념이 필요한 이유입니다.

3.4 Sheaves: 국소적 정보의 전역화

Sheaf는 presheaf에 추가적인 조건을 부여한 것입니다. 이 추가 조건들은 local-to-global 원리를 수학적으로 표현합니다.

정의 3.4 (Sheaf). *Presheaf $\mathcal{F}$가 다음 두 조건을 만족할 때 sheaf라고 합니다:*

1. *(Locality) 모든 열린집합 $U \subseteq X$와 그것의 열린덮개 $\{U_i\}$에 대해, $s, t \in \mathcal{F}(U)$가 모든 i에 대해 $\rho_{UU_i}(s) = \rho_{UU_i}(t)$이면 $s = t$입니다.*
2. *(Gluing) 열린집합 $U \subseteq X$와 그것의 열린덮개 $\{U_i\}$에 대해, 만약 모든 i, j에 대해 $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$가 $U_i \cap U_j$ 위에서 일치한다면 (즉, $\rho_{U_i, U_i \cap U_j}(s_i) = \rho_{U_j, U_i \cap U_j}(s_j)$), $s \in \mathcal{F}(U)$가 존재하여 모든 i에 대해 $\rho_{UU_i}(s) = s_i$입니다.*

이 정의는 다음과 같이 해석될 수 있습니다:

- Locality 조건은 sheaf의 원소들이 "국소적으로" 결정된다는 것을 의미합니다.
- Gluing 조건은 국소적으로 정의된 "호환되는" 정보들을 전역적인 정보로 "붙일 수" 있다는 것을 의미합니다.

예 3.5 (연속함수의 sheaf). *앞서 본 연속함수의 presheaf $\mathcal{C}$는 실제로 sheaf입니다. Locality 조건은 함수의 동등성이 국소적으로 결정된다는 사실에서, gluing 조건은 국소적으로 정의된 연속함수들을 붙여 전역적 연속함수를 만들 수 있다는 사실에서 비롯됩니다.*

예 3.6 (Sheaf가 아닌 presheaf의 예). *$X = \mathbb{R}$에 대해, presheaf $\mathcal{F}$를 다음과 같이 정의합니다: $\mathcal{F}(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ is bounded}\}$*

이 presheaf는 sheaf가 아닙니다. 예를 들어, $U_n = (-n, n)$, $n \in \mathbb{N}$로 정의하고, 각 U_n에서 $f_n(x) = x$로 정의하면, 이 함수들은 각 U_n에서 유계이지만 전체 $\mathbb{R}$에서는 유계함수로 "glue"할 수 없습니다.

예 3.7 (Constant Functions Presheaf). *$X = \mathbb{R}$에 대해, presheaf $\mathcal{F}$를 다음과 같이 정의합니다:*

$$\mathcal{F}(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ is constant}\}$$

여기서 U는 $\mathbb{R}$의 열린부분집합입니다.

이 presheaf $\mathcal{F}$도 sheaf가 아닙니다. 이를 확인하기 위해, gluing 조건이 만족되지 않는 경우를 살펴보겠습니다:

- *$U_1 = (-2, -1)$, $U_2 = (1, 2)$라고 합시다.*
- *$f_1 \in \mathcal{F}(U_1)$를 $f_1(x) = 1$로, $f_2 \in \mathcal{F}(U_2)$를 $f_2(x) = 2$로 정의합니다.*
- *$U_1 \cap U_2 = \emptyset$이므로, f_1과 f_2는 서로 모순되지 않습니다.*
- *그러나 $U_1 \cup U_2$ 전체에서 정의된 하나의 constant function으로 f_1과 f_2를 "glue"할 수 없습니다.*

이 예시는 sheaf의 "local-to-global" 특성이 실패하는 경우를 보여줍니다. 국소적으로 정의된 constant functions들을 전체 공간에서 정의된 하나의 constant function으로 "glue"할 수 없기 때문입니다.

3.5 Sheafification: Presheaf를 Sheaf로 만들기

모든 presheaf가 sheaf인 것은 아닙니다. 하지만 우리는 주어진 presheaf를 "가장 가까운" sheaf로 변환할 수 있습니다. 이 과정을 sheafification이라고 합니다[KS05].

정의 3.8 (Sheafification)**.** *Presheaf $\mathcal{F}$의 sheafification $\mathcal{F}^+$는 다음과 같이 정의됩니다:*

$$\mathcal{F}^+(U) = \{(s_x)_{x \in U} \mid s_x \in \mathcal{F}_x, \exists V \ni x, s \in \mathcal{F}(V) \ s.t.\ s_y = s_y \ for\ all\ y \in V\}$$

여기서 $\mathcal{F}_x$는 x에서의 stalk입니다.

Sheafification은 다음과 같은 보편적 성질(universal property)을 가집니다: 임의의 presheaf에서 sheaf로의 morphism은 유일하게 sheafification을 통해 factorize됩니다.

예 3.9 (Bounded functions presheaf의 sheafification)**.** *앞서 본 bounded functions의 presheaf $\mathcal{F}$의 sheafification $\mathcal{F}^+$는 다음과 같습니다:*
$\mathcal{F}^+(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \mid \forall x \in U, \exists$ 열린근방 $V_x \ni x \ s.t.\ f|_{V_x}$ *is bounded*$\}$
즉, $\mathcal{F}^+$는 locally bounded functions의 sheaf입니다.

3.6 Locally Constant Sheaves

Locally constant sheaves는 sheaf theory에서 중요한 역할을 하는 특별한 종류의 sheaf입니다[Dim04].

정의 3.10 (Locally Constant Sheaf)**.** *Sheaf $\mathcal{F}$가 locally constant라는 것은 모든 점 $x \in X$에 대해, x의 어떤 열린 근방 U가 존재하여 $\mathcal{F}|_U$가 constant sheaf와 isomorphic할 때를 말합니다.*

예 3.11 (Constant Functions Presheaf)**.** *$X = \mathbb{R}$에 대해, presheaf $\mathcal{F}$를 다음과 같이정의합니다:*

$$\mathcal{F}(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ is constant}\}$$

여기서 U는 $\mathbb{R}$의 열린부분집합입니다. 이 $\mathcal{F}$는 sheaf가 아닙니다. 예를 들어, $U_1 = (-2, -1)$과 $U_2 = (1, 2)$에서 각각 다른 상수값을 갖는 함수들을 $U_1 \cup U_2$ 전체에서 정의된 하나의 constant function으로 "glue"할 수 없기 때문입니다.

이 constant functions presheaf의 sheafification은 constant sheaf가 됩니다. 이를 $\mathcal{C}$라고 하면:

$$\mathcal{C}(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ is locally constant}\}$$

이 sheaf $\mathcal{C}$는 locally constant function들을 모두 포함하며, globally 정의된 상수함수도 포함합니다. 이는 S^1을 포함한 모든 위상공간에서 성립합니다.

그러나 S^1에서는 $\mathcal{C}$ 외에도 다른 종류의 locally constant sheaf가 존재합니다. 이들 중 일부는 global section을 가지지 않습니다.

예 3.12 (Locally Constant Sheaf on S^1 without Global Sections)**.** *S^1을 $[0, 1]$의 양 끝점을 동일시한 공간으로 생각합시다. Locally constant sheaf $\mathcal{L}$을 다음과 같이 정의합니다:*

- *각 열린구간 $(a, b) \subset [0, 1]$에 대해, $\mathcal{L}((a, b)) = \mathbb{R}$*
- *$0 < a < b < 1$일 때, restriction map은 항등사상입니다.*
- *$0 \in (a, b)$일 때, $(0, b)$에서 $(a, 1)$로의 restriction map은 $x \mapsto -x$입니다.*

이 sheaf $\mathcal{L}$은 locally constant이지만, global section을 가지지 않습니다. $[0, 1]$을 한 바퀴 돌면 함숫값의 부호가 바뀌기 때문입니다.

이러한 현상이 발생하는 이유는 glueing map을 다르게 주면, 국소적으로는 일정하지만 전역적으로는 일정할 수 없는 구조가 만들어지기 때문입니다.

명제 3.13. *X가 단순 연결된 공간일 때, X 위의 모든 locally constant sheaf는 constant sheaf와 동형입니다.*

이는 단순 연결된 공간에서는 모든 glueing map이 항등사상과 같아져야 한다는 사실에서 비롯됩니다. 따라서 $\mathbb{R}^n$과 같은 공간에서는 모든 locally constant sheaf가 constant sheaf와 동형이 됩니다.

Locally constant sheaves는 대수적 위상수학, 대수기하학, 그리고 표현론 등 다양한 분야에서 중요한 역할을 합니다. 특히, 이들은 local systems라고도 불리며, 국소적으로 일정한 구조를 전역적으로 연결하는 방법을 제공합니다.

3.7 Sheaf의 예시와 응용

Sheaf는 다양한 수학 분야에서 중요한 역할을 합니다. 몇 가지 예시를 살펴보겠습니다:

예 3.14 (Differentiable functions의 sheaf)**.** *미분가능다양체 M 위에서, 각 열린집합 U에 대해 U 위에서 정의된 미분가능함수들의 집합을 대응시키는 sheaf를 고려할 수 있습니다. 이 sheaf는 미분기하학에서 중요한 역할을 합니다[Har77].*

예 3.15 (Holomorphic functions의 sheaf)**.** *복소다양체 X 위에서, 각 열린집합 U에 대해 U 위에서 정의된 holomorphic 함수들의 집합을 대응시키는 sheaf $\mathcal{O}_X$를 고려할 수 있습니다. 이 sheaf는 복소기하학의 기본 대상입니다[Har77].*

예 3.16 (Constant sheaf)**.** *위상공간 X와 집합 (또는 group, ring 등) A에 대해, 모든 열린집합 U에 대해 $\mathcal{F}(U) = A$로 정의되는 sheaf를 constant sheaf라고 합니다. 이는 가장 단순한 형태의 sheaf입니다[KS05].*

이러한 sheaf들은 각각의 수학 분야에서 중요한 역할을 하며, 이들의 cohomology를 연구함으로써 해당 공간의 기하학적, 위상적 성질을 이해할 수 있습니다.

3.8 중요한 용어들

여기서 sheaf theory의 몇 가지 중요한 용어들을 정리하겠습니다.

정의 3.17 (Section)**.** *Presheaf $\mathcal{F}$와 열린집합 $U \subseteq X$에 대해, $\mathcal{F}(U)$의 원소를 $\mathcal{F}$의 U 위의 section이라고 합니다.*

정의 3.18 (Stalk)**.** *점 $x \in X$에서의 $\mathcal{F}$의 stalk은 다음과 같이 정의됩니다:*

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}(U)$$

여기서 $\varinjlim$은 colimit (또는 direct limit)을 나타냅니다.

Stalk은 점 x 주변의 국소적 정보를 모두 포함합니다. 이는 presheaf의 국소적 성질을 이해하는데 중요한 도구입니다[Ive86].

3.9 Sheaf Morphisms

Sheaves 사이의 관계를 이해하기 위해, sheaf morphism의 개념을 도입합니다.

정의 3.19 (Sheaf Morphism)**.** *두 sheaves $\mathcal{F}$와 $\mathcal{G}$ 사이의 morphism $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$는 각 열린집합 U에 대한 함수 $\phi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$의 집합으로, 모든 $V \subseteq U$에 대해 다음 diagram이 commute합니다:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\phi_U} & \mathcal{G}(U) \\ {\scriptstyle \rho^{\mathcal{F}}_{UV}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \rho^{\mathcal{G}}_{UV}} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\phi_V} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

Sheaf morphisms는 sheaves의 category를 정의하는 데 사용됩니다[KS05].

3.10 Conclusion

이 장에서 우리는 presheaf와 sheaf의 정의를 살펴보았습니다. 이 개념들은 local-to-global 원리를 정확하게 표현하는 수학적 도구로, 다양한 수학 분야에서 중요한 역할을 합니다.

Sheaf theory는 단순히 추상적인 이론이 아닙니다. 이는 복잡한 수학적 구조를 이해하고 분석하는 강력한 도구입니다. 특히 복잡한 기하학적 대상을 다룰 때, sheaf theory는 국소적 정보를 전역적 정보로 변환하는 체계적인 방법을 제공합니다.

다음 장에서는 sheaf에 대한 다양한 operations를 살펴보고, 이들이 어떻게 sheaf의 구조와 성질을 연구하는 데 사용되는지 알아보겠습니다.

Chapter 4

Sheaf Operations

4.1 Introduction

이전 장에서 우리는 presheaf와 sheaf의 기본 개념을 살펴보았습니다. 이번 장에서는 sheaf들 사이의 다양한 연산들을 소개하고, 이들이 어떻게 sheaf의 구조와 성질을 연구하는 데 사용되는지 알아보겠습니다. 이러한 연산들은 sheaf theory를 더욱 풍부하고 유용한 도구로 만들어줍니다.

4.2 Direct Image

먼저 continuous map에 대한 direct image를 살펴보겠습니다.

정의 4.1 (Direct Image)**.** *$f : X \to Y$를 continuous map이라 하고, $\mathcal{F}$를 X 위의 sheaf라고 합시다. $\mathcal{F}$의 direct image $f_*\mathcal{F}$는 Y 위의 sheaf로, 다음과 같이 정의됩니다:*
$(f_*\mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U))$ for open $U \subseteq Y$
여기서 restriction maps는 $\mathcal{F}$의 restriction maps로부터 자연스럽게 유도됩니다.

Direct image는 X 위의 정보를 Y 위로 "밀어내는" 역할을 합니다. 이는 f를 통해 X의 구조를 Y에 반영하는 방법을 제공합니다.

예 4.2 (Constant Sheaf의 Direct Image)**.** *$f : X \to Y$를 continuous map이라 하고, $\underline{A}_X$를 X 위의 constant sheaf라고 합시다. 이때 $f_*\underline{A}_X$는 일반적으로 Y 위의 constant sheaf가 아닙니다. 대신, 각 $y \in Y$에 대해 $(f_*\underline{A}_X)_y \cong A^{\pi_0(f^{-1}(y))}$입니다. 여기서 $\pi_0(f^{-1}(y))$는 $f^{-1}(y)$의 연결성분들의 집합입니다.*

4.3 Inverse Image

Direct image의 반대 개념으로 inverse image가 있습니다.

정의 4.3 (Inverse Image)**.** *$f : X \to Y$를 continuous map이라 하고, $\mathcal{G}$를 Y 위의 sheaf라고 합시다. $\mathcal{G}$의 inverse image $f^{-1}\mathcal{G}$는 X 위의 sheaf로, 다음 presheaf의 sheafification으로 정의됩니다:*
$U \mapsto \mathrm{colim}_{V \supseteq f(U)}\, \mathcal{G}(V)$ for open $U \subseteq X$

Inverse image는 Y 위의 정보를 X 위로 "당겨오는" 역할을 합니다. 이는 f를 통해 Y의 구조를 X에 반영하는 방법을 제공합니다.

예 4.4 (Constant Sheaf의 Inverse Image)**.** *$f : X \to Y$를 continuous map이라 하고, $\underline{A}_Y$를 Y 위의 constant sheaf라고 합시다. 이때 $f^{-1}\underline{A}_Y \cong \underline{A}_X$입니다. 즉, constant sheaf의 inverse image는 다시 constant sheaf가 됩니다.*

4.4 Tensor Product of Sheaves

Sheaves 사이의 tensor product는 대수적 구조를 결합하는 방법을 제공합니다.

정의 4.5 (Tensor Product of Sheaves)**.** *$\mathcal{F}$와 $\mathcal{G}$를 X 위의 sheaves of rings (또는 modules)라고 합시다. $\mathcal{F}$와 $\mathcal{G}$의 tensor product $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$는 다음 presheaf의 sheafification으로 정의됩니다:*
$U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes \mathcal{G}(U)$ *for open* $U \subseteq X$

Tensor product는 두 sheaf의 정보를 결합하는 방법을 제공합니다. 이는 특히 대수기하학에서 중요한 역할을 합니다.

예 4.6 (Line Bundles의 Tensor Product)**.** *X를 smooth manifold라고 하고, $\mathcal{L}$과 $\mathcal{M}$을 X 위의 line bundles의 sheaves of sections이라고 합시다. 이때 $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}$은 새로운 line bundle $L \otimes M$의 sheaf of sections이 됩니다.*

4.5 Hom Sheaf

Hom sheaf는 두 sheaf 사이의 "국소적 morphisms"을 모아놓은 것입니다.

정의 4.7 (Hom Sheaf)**.** *$\mathcal{F}$와 $\mathcal{G}$를 X 위의 sheaves라고 합시다. Hom sheaf $\mathcal{H}\wr\Updownarrow(\mathcal{F}, \mathcal{G})$는 다음과 같이 정의됩니다:*
$\mathcal{H}\wr\Updownarrow(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U) = Hom(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$ *for open* $U \subseteq X$
여기서 오른쪽의 Hom은 U 위의 sheaf morphisms의 집합을 나타냅니다.

Hom sheaf는 두 sheaf 사이의 관계를 국소적으로 연구할 수 있게 해줍니다. 이는 특히 sheaf cohomology를 정의하는 데 중요한 역할을 합니다.

예 4.8 (Endomorphism Sheaf)**.** *$\mathcal{F}$를 X 위의 locally free sheaf라고 합시다. 이때 $\mathcal{E}\backslash\lceil(\mathcal{F}) := \mathcal{H}\wr\Updownarrow(\mathcal{F}, \mathcal{F})$는 $\mathcal{F}$의 endomorphism sheaf라고 불립니다. 각 점에서 이 sheaf의 stalk은 행렬 대수가 됩니다.*

4.6 Pullback and Pushforward

Pullback과 pushforward는 direct image와 inverse image의 일반화된 형태입니다.

정의 4.9 (Pullback)**.** *$f : X \to Y$를 continuous map이라 하고, $\mathcal{G}$를 Y 위의 $\mathcal{O}_Y$-module이라고 합시다. $\mathcal{G}$의 pullback $f^*\mathcal{G}$는 다음과 같이 정의됩니다:*
$f^*\mathcal{G} = f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$

Pullback은 Y 위의 대수적 구조를 X 위로 가져오는 방법을 제공합니다.

정의 4.10 (Pushforward)**.** *$f : X \to Y$를 continuous map이라 하고, $\mathcal{F}$를 X 위의 $\mathcal{O}_X$-module이라고 합시다. $\mathcal{F}$의 pushforward $f_*\mathcal{F}$는 $f_*\mathcal{F}$를 $\mathcal{O}_Y$-module로 간주한 것입니다.*

Pushforward는 X 위의 대수적 구조를 Y 위로 보내는 방법을 제공합니다.

예 4.11 (Vector Bundle의 Pullback)**.** *$f : X \to Y$를 smooth map이라 하고, E를 Y 위의 vector bundle이라고 합시다. E의 sheaf of sections를 $\mathcal{E}$라고 할 때, $f^*\mathcal{E}$는 pullback bundle f^*E의 sheaf of sections가 됩니다.*

4.7 Kernel and Cokernel

Kernel과 cokernel은 sheaf morphism의 정보를 포착하는 중요한 도구입니다.

정의 4.12 (Kernel). *$\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$를 sheaf morphism이라고 합시다. ϕ의 kernel $\ker\phi$는 다음과 같이 정의되는 $\mathcal{F}$의 subsheaf입니다:*
$(\ker\phi)(U) = \{s \in \mathcal{F}(U) \mid \phi_U(s) = 0\}$ *for open* $U \subseteq X$

정의 4.13 (Cokernel). *$\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$를 sheaf morphism이라고 합시다. ϕ의 cokernel cokerϕ는 다음 presheaf의 sheafification입니다:*
$U \mapsto \mathcal{G}(U)/\phi_U(\mathcal{F}(U))$ *for open* $U \subseteq X$

Kernel과 cokernel은 sheaf morphism의 "정확성"을 측정하는 데 사용됩니다. 이들은 sheaf cohomology를 정의하는 데 중요한 역할을 합니다.

예 4.14 (Exponential Sequence). *X를 complex manifold라고 하고, $\mathcal{O}_X$를 holomorphic functions의 sheaf, $\mathcal{O}_X^*$를 nowhere vanishing holomorphic functions의 sheaf라고 합시다. 이때 다음 sequence가 exact합니다:*
$0 \to \mathbb{Z}_X \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_X^* \to 1$
여기서 첫 번째 map은 inclusion이고, 두 번째 map은 exponential function입니다. 이 sequence의 exactness는 $\ker(\exp) = \mathbb{Z}_X$*와 coker*$(\exp) = 1$*을 의미합니다.*

4.8 Derived Functors

Derived functors는 sheaf operations를 derived category의 맥락으로 확장합니다. 이는 복잡한 대수적 구조를 다루는 데 매우 유용한 도구입니다.

정의 4.15 (Right Derived Functor). *$F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$를 left exact functor라고 합시다 ($\mathcal{A}$와 $\mathcal{B}$는 abelian categories). F의 right derived functors $R^iF : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ($i \geq 0$)는 다음과 같이 정의됩니다:*
$A \in \mathcal{A}$에 대해 injective resolution을 취합니다: $0 \to A \to I^0 \to I^1 \to I^2 \to \cdots$ *그리고* $R^iF(A) = H^i(F(I^\bullet))$*로 정의합니다.*

Derived functors는 특히 sheaf cohomology를 정의하는 데 중요한 역할을 합니다.

예 4.16 (Sheaf Cohomology). *X 위의 sheaf $\mathcal{F}$에 대해, sheaf cohomology $H^i(X, \mathcal{F})$는 다음과 같이 정의됩니다:*
$H^i(X, \mathcal{F}) = R^i\Gamma(X, \mathcal{F})$
여기서 $\Gamma(X, -)$는 global sections functor입니다.

4.9 Conclusion

이 장에서 우리는 다양한 sheaf operations를 살펴보았습니다. 이러한 operations는 sheaf theory의 강력함을 보여주며, 복잡한 수학적 구조를 다루는 데 필수적인 도구를 제공합니다.

Direct image와 inverse image는 연속 함수를 통해 sheaf의 정보를 전달하는 방법을 제공합니다. Tensor product와 Hom sheaf는 sheaves 사이의 대수적 관계를 연구하는 데 사용됩니다. Kernel과 cokernel은 sheaf morphism의 정확성을 측정하는 도구입니다. 마지막으로, derived functors는 이러한 개념들을 더 일반적인 맥락으로 확장합니다.

이러한 operations를 이해하고 활용하는 것은 sheaf theory를 실제 문제에 적용하는 데 핵심적입니다.

Chapter 5

Sheaf Cohomology의 기초

5.1 서론: Cohomology의 직관적 이해

Cohomology는 수학의 여러 분야에서 중요한 역할을 하는 개념입니다. 이 장에서는 cohomology의 기본 아이디어를 살펴보고, 특히 sheaf cohomology에 대해 자세히 알아보겠습니다 [KS90].

5.1.1 시각적 사고와 언어적 사고

인간의 사고 과정은 크게 두 가지로 나눌 수 있습니다: 시각적인 것과 언어적인 것입니다. 시각적 사고를 통해 우리가 얻고자 하는 것은 주로 생존에 필요한 정보입니다. 그 중에서도 가장 중요한 데이터는 모양과 크기입니다.

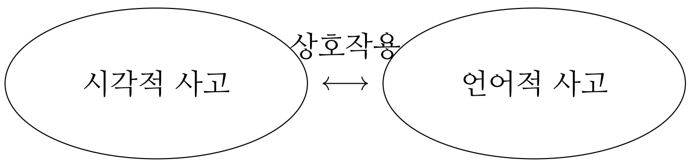


Figure 5.1: 시각적 사고와 언어적 사고의 상호작용

5.2 Euler 특성수와 Betti 수

5.2.1 Euler 특성수

Euler 특성수는 도형의 점, 선, 면의 수를 더하고 뺀 값입니다. 놀랍게도, 이 수는 도형을 자르거나 붙이지 않는 한 변하지 않습니다.

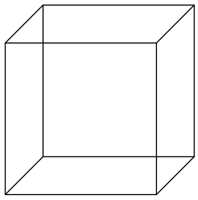
$$\chi = V - E + F$$

여기서 V는 꼭짓점(점)의 수, E는 모서리(선)의 수, F는 면의 수입니다.

예 5.1 (정육면체의 Euler 특성수)**.** *정육면체는 8개의 꼭짓점, 12개의 모서리, 6개의 면을 가집니다. 따라서 Euler 특성수는:*

$$\chi = 8 - 12 + 6 = 2$$

이는 구의 Euler 특성수와 같습니다.



정육면체 ($\chi = 2$)

Figure 5.2: 정육면체와 그의 Euler 특성수

5.2.2 Betti 수

Betti 수는 공간의 "구멍"을 측정하는 또 다른 방법입니다. n차원 Betti 수는 n차원 구멍의 수를 나타냅니다.

예 5.2 (구와 토러스의 Betti 수). • *구(sphere):*

- $\beta_0 = 1$ *(연결 성분): 구는 하나의 연결된 공간입니다.*
- $\beta_1 = 0$ *(1차원 구멍): 구 위의 모든 폐곡선은 수축 가능합니다.*
- $\beta_2 = 1$ *(2차원 구멍): 구는 하나의 2차원 '구멍' (내부 공간)을 가집니다.*

• *토러스(torus):*

- $\beta_0 = 1$ *(연결 성분): 토러스도 하나의 연결된 공간입니다.*
- $\beta_1 = 2$ *(1차원 구멍): 토러스 위에는 두 개의 독립적인 수축 불가능한 폐곡선이 있습니다 (경도 방향과 위도 방향).*
- $\beta_2 = 1$ *(2차원 구멍): 토러스도 하나의 2차원 '구멍' (내부 공간)을 가집니다.*

이러한 Betti 수는 각 공간의 위상적 특성을 잘 나타냅니다.

5.3 Homology와 Cohomology의 관계

Homology와 cohomology는 서로 밀접한 관련이 있지만, 약간 다른 관점에서 공간의 특성을 연구합니다.

5.3.1 Homology: 구멍을 둘러싸기

Homology는 "구멍을 둘러싸는 것"을 연구합니다. n차원 구멍은 수축불가능한 n차원 경계로 표현됩니다 [Hat02].

1-dimensional homology 2-dimensional homology

Figure 5.3: Homology: 구멍을 둘러싸는 cycles

5.3.2 Cohomology: 구멍을 관통하기

Cohomology는 구멍을 "관통하는" flows나 fields로 측정합니다. 이 "flows"는 구멍 때문에 없앨 수 없습니다 [BT13].

예 5.3 (원의 Cohomology)**.** *원 S^1을 생각해봅시다. 1-form dx는 닫혀있지만 (즉, $d(dx) = 0$), 정확하지 않습니다 (어떤 함수 f에 대해 $dx = df$가 될 수 없습니다). 이는 $H^1_{dR}(S^1) \cong \mathbb{R}$을 의미하며, 원이 하나의 "구멍"을 가지고 있다는 직관과 일치합니다.*

5.4 Free Abelian Group의 도입

Free Abelian Group을 도입하게 된 자연스러운 이유는 본질적인 점, 선, 면을 정확히 표현하기 위함입니다. 예를 들어, 선을 하나 지우면 두 개의 면이 하나가 됩니다. 이때 새로운 면의 이름을 어떻게 지어야 할까요?

예 5.4 (Free Abelian Group의 사용)**.** *삼각형의 세 변을 a, b, c라고 합시다. 이들의 방향을 정하면, 삼각형의 경계는 $a + b + c$ 또는 $-a - b - c$로 표현할 수 있습니다. 이는 Free Abelian Group의 원소입니다.*

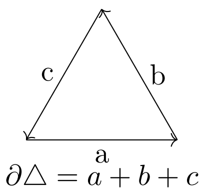


Figure 5.4: 삼각형 경계의 Free Abelian Group 표현

5.5 De Rham Cohomology와 Singular Cohomology

De Rham cohomology와 Singular cohomology는 서로 밀접한 관련이 있습니다. 미분형식은 적분을 통해 수를 주는 함수와 같습니다. 이는 Singular Homology의 chain에 수를 대응시키는 것과 유사합니다.

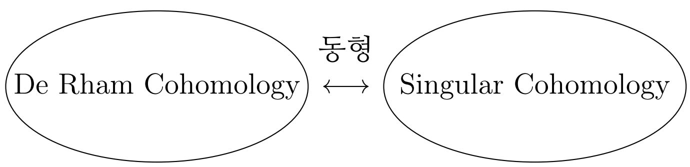


Figure 5.5: De Rham Cohomology와 Singular Cohomology의 연결

예 5.5 (원의 De Rham 코호몰로지와 Singular 코호몰로지)**.** *원 S^1에 대해:*

- *De Rham 코호몰로지: $H^0_{dR}(S^1) \cong \mathbb{R}$, $H^1_{dR}(S^1) \cong \mathbb{R}$*
- *Singular 코호몰로지: $H^0(S^1; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$, $H^1(S^1; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$*

두 이론이 같은 결과를 제공함을 볼 수 있습니다.

5.6 Chain Complex와 Cohomology

Cohomology를 정의하기 위해, 먼저 chain complex의 개념을 도입해야 합니다.

정의 5.6 (Chain Complex)**.** *Chain complex는 연속된 abelian groups와 그들 사이의 homomorphisms의 열입니다:*

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots$$

여기서 중요한 성질은 $d_n \circ d_{n+1} = 0$ *(즉,* $Im(d_{n+1}) \subseteq \ker(d_n)$*) 입니다.*

이제 cohomology를 정의할 수 있습니다:

정의 5.7 (Cohomology)**.** *Chain complex에 대해, n번째 cohomology group은 다음과 같이 정의됩니다:*

$$H^n = \ker(d^n)/Im(d^{n-1})$$

여기서 d^n*은 cochain complex에서의 미분 연산자입니다.*

5.7 Sheaf의 필요성: Local-Global 문제

De Rham cohomology를 이해하면서 우리는 중요한 문제에 직면합니다. 이는 Poincaré 보조정리 (lemma)와 관련이 있습니다.

정리 5.8 (Poincaré 보조정리)**.** *모든 닫힌 형식(closed form)은 국소적으로(locally) 정확 형식(exact form)입니다.*

이 정리는 우리의 직관과 충돌하는 듯 보입니다. 왜냐하면 전역적으로(globally)는 닫혀 있지만 정확하지 않은 형식이 존재하기 때문입니다. 이는 국소(local)와 전역(global)의 차이를 보여주는 중요한 예입니다.

예 5.9 (국소와 전역의 차이)**.** *평면에서 점* $(0,0)$*을 제외한 공간* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$*을 생각해봅시다. 이 공간에서 1-형식*

$$\omega = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$$

는 전체적으로 닫혀 있지만(즉, $d\omega = 0$*) 정확하지 않습니다. 그러나 이 공간의 어떤 작은 열린 집합에서도* ω*는 정확합니다.*

이러한 현상은 국소적인 정보를 전역적인 정보로 "붙이는" 과정에서 새로운 정보가 생길 수 있음을 보여줍니다. 이것이 바로 sheaf theory가 필요한 이유입니다.

5.7.1 Sheafification과 Cohomology

Sheafification은 국소적인 정보를 전역적인 정보로 확장하는 과정입니다. 이 과정에서 새로운 전역적 단면(global section)이 생길 수 있으며, 이것이 바로 cohomology의 생성자(generator)가 됩니다.

예 5.10 (Sheafification에서의 새로운 Global Section)**.** $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *위에서 정의된 각도 함수* θ*를 생각해봅시다. 이 함수는 국소적으로는 잘 정의되지만, 전체 공간에서는 단가(single-valued) 함수가 아닙니다. Sheafification 과정을 거치면, 이 국소적 정의들이 "붙여져" 새로운 전역적 단면을 만들어냅니다. 이 새로운 단면이 바로* $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \mathbb{R})$*의 생성자가 됩니다.*

이러한 관점에서 sheaf cohomology는 단순히 위상공간의 "구멍"을 측정하는 것이 아니라, 국소적 정보와 전역적 정보 사이의 차이를 정량화하는 도구라고 볼 수 있습니다.

이러한 이유로, sheaf theory와 sheaf cohomology는 현대 수학에서 매우 중요한 도구가 되었습니다. 이들은 대수기하학, 복소해석학, 미분기하학 등 다양한 분야에서 핵심적인 역할을 합니다.

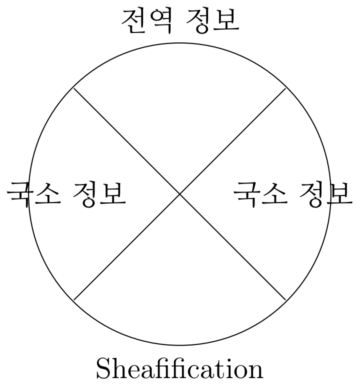


Figure 5.6: Sheafification의 개념

5.8 De Rham Cohomology

De Rham cohomology는 미분형식을 이용하여 정의되는 cohomology 이론입니다 [BT13].

정의 5.11 (De Rham Cohomology)**.** *Smooth manifold M에 대해, de Rham cohomology $H^k_{dR}(M)$는 다음과 같이 정의됩니다:*

$$H^k_{dR}(M) = \frac{\{\textit{closed } k\textit{-forms}\}}{\{\textit{exact } k\textit{-forms}\}}$$

여기서 closed k-form은 $d\omega = 0$를 만족하는 k-form이고, exact k-form은 어떤 $(k-1)$-form η에 대해 $\omega = d\eta$인 형태의 k-form입니다.

예 5.12 (구면의 De Rham Cohomology)**.** *2차원 구면 S^2에 대해:*

$$H^0_{dR}(S^2) \cong \mathbb{R}, \quad H^1_{dR}(S^2) = 0, \quad H^2_{dR}(S^2) \cong \mathbb{R}$$

이는 구면이 연결되어 있고 ($H^0 \cong \mathbb{R}$), 1차원 구멍은 없으며 ($H^1 = 0$), 2차원 "내부" 공간을 가진다 ($H^2 \cong \mathbb{R}$)는 직관과 일치합니다.

구체적인 계산:

- *$H^0_{dR}(S^2)$: 상수 함수들이 closed 0-forms이며, 이들은 exact가 아닙니다.*
- *$H^1_{dR}(S^2)$: 모든 closed 1-form은 exact입니다 (단순 연결성 때문).*
- *$H^2_{dR}(S^2)$: 면적 형식 $\omega = \sin\theta d\theta \wedge d\phi$는 closed이지만 exact가 아닙니다.*

5.9 Sheaf Cohomology

Sheaf cohomology는 sheaf theory의 관점에서 cohomology를 정의합니다. 이는 더 일반적인 공간과 구조에 대해 cohomology를 정의할 수 있게 해줍니다 [KS90].

정의 5.13 (Sheaf Cohomology)**.** *위상공간 X 위의 sheaf $\mathcal{F}$에 대해, $\mathcal{F}$를 계수로 하는 X의 i번째 sheaf cohomology는 다음과 같이 정의됩니다:*

$$H^i(X, \mathcal{F}) = R^i\Gamma(X, \mathcal{F})$$

여기서 $\Gamma(X, -)$는 global section functor이고, $R^i\Gamma$는 그의 i번째 right derived functor입니다.

예 5.14 (Constant Sheaf의 Sheaf Cohomology)**.** *X가 "좋은" 위상공간(예: CW complex)이고 $\mathbb{R}$이 X 위의 constant sheaf일 때:*

$$H^i(X, \underline{\mathbb{R}}) \cong H^i(X; \mathbb{R})$$

여기서 오른쪽은 X의 singular cohomology입니다.

예를 들어, 원 S^1에 대해:

- $H^0(S^1, \underline{\mathbb{R}}) \cong \mathbb{R}$ *(연결 성분)*
- $H^1(S^1, \underline{\mathbb{R}}) \cong \mathbb{R}$ *(1차원 "구멍")*
- $H^i(S^1, \underline{\mathbb{R}}) = 0$ *for* $i \geq 2$

이는 sheaf cohomology가 기존의 cohomology 이론을 일반화함을 보여줍니다.

5.10 Poincaré Duality

Poincaré duality는 manifold의 homology와 cohomology 사이의 깊은 관계를 나타냅니다 [Hat02].

정리 5.15 (Poincaré Duality)**.** *M이 n차원 compact, oriented manifold일 때, 모든 k에 대해 다음과 같은 동형이 성립합니다:*

$$H^k(M) \cong H_{n-k}(M)$$

예 5.16 (3차원 구면의 Poincaré Duality)**.** *3차원 구면 S^3에 대해:*

- $H^0(S^3) \cong H_3(S^3) \cong \mathbb{R}$ *(점 vs 전체 공간)*
- $H^1(S^3) \cong H_2(S^3) = 0$ *(1차원 구멍 없음 vs 2차원 surface 없음)*
- $H^2(S^3) \cong H_1(S^3) = 0$ *(2차원 구멍 없음 vs 1차원 loop 없음)*
- $H^3(S^3) \cong H_0(S^3) \cong \mathbb{R}$ *(부피 형식 vs 연결 성분)*

5.11 Grothendieck의 Six Operations

Sheaf cohomology를 더 깊이 이해하기 위해, Grothendieck의 six operations를 간단히 소개하겠습니다 [KS05]. 이는 sheaves와 그들의 cohomology를 다루는 강력한 도구입니다.

Six operations는 다음과 같습니다: 1. Direct image: f_* 2. Inverse image: f^{-1} 3. Proper direct image: $f_!$ 4. Exceptional inverse image: $f^!$ 5. Tensor product: $\otimes$ 6. Internal Hom: $\mathcal{H}om$

이들 operations의 자세한 성질과 관계는 6단원에서 더 깊이 다룰 것입니다.

5.12 Spectral Sequences

Spectral sequences는 복잡한 cohomological 계산을 단순화하는 강력한 도구입니다 [McC01]. 여기서는 기본 개념만 간단히 소개하고, 자세한 내용은 6단원에서 다루겠습니다.

정의 5.17 (Spectral Sequence)**.** *Spectral sequence는 다음과 같은 데이터의 집합입니다:*

- *각 $r \geq 0$에 대해, bigraded objects의 family $\{E_r^{p,q}\}_{p,q \in \mathbb{Z}}$*
- *Differentials $d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$, $d_r \circ d_r = 0$*
- *Isomorphisms $E_{r+1}^{p,q} \cong H(E_r^{p,q})$*

Spectral sequences의 구체적인 예시와 계산 방법은 6단원에서 자세히 다룰 예정입니다.

5.13 Derived Categories

Derived categories는 homological algebra를 더 자연스럽게 다룰 수 있게 해주는 강력한 도구입니다 [KS05]. 여기서는 기본 개념만 소개하고, 자세한 내용은 6단원에서 다루겠습니다.

정의 5.18 (Derived Category)**.** *Abelian category $\mathcal{A}$의 derived category $D(\mathcal{A})$는 다음과 같이 구성됩니다:*

- *Objects: $\mathcal{A}$의 complexes*
- *Morphisms: Chain maps의 localization (quasi-isomorphisms를 isomorphisms로 만듦)*

Derived categories의 구체적인 성질과 응용은 6단원에서 더 자세히 살펴볼 것입니다.

5.14 결론

이 장에서 우리는 다음과 같은 주요 개념들을 살펴보았습니다:

- Homology와 cohomology의 직관적 이해
- Chain complex와 cohomology의 정의
- De Rham cohomology와 그 예시
- Sheaf의 필요성과 local-global 문제
- Sheaf cohomology의 정의와 특성
- Poincaré duality
- Grothendieck의 six operations (기본 소개)
- Spectral sequences와 그 응용 (기본 소개)
- Derived categories의 기본 개념 (기본 소개)

이러한 개념들은 현대 수학의 여러 분야에서 핵심적인 역할을 합니다. 특히 대수기하학, 대수적 위상수학, 미분기하학 등에서 중요하게 사용됩니다. Sheaf theory를 통해 우리는 국소적 정보와 전역적 정보 사이의 관계를 더 깊이 이해할 수 있게 되었으며, 이는 복잡한 수학적 구조를 분석하는 데 강력한 도구를 제공합니다.

다음 장에서는 이러한 개념들을 더 깊이 있게 탐구하고, 구체적인 계산 방법과 응용에 대해 알아보겠습니다. 특히 Čech cohomology, derived functors, 그리고 여기서 간단히 소개된 spectral sequences, derived categories, six operations 등에 대해 자세히 다룰 예정입니다.

Chapter 6

Čech Cohomology와 Derived Functors

6.1 서론

이전 장에서 우리는 sheaf cohomology의 기본 개념을 살펴보았습니다. 이번 장에서는 sheaf cohomology를 계산하는 구체적인 방법 중 하나인 Čech cohomology를 소개하고, 이를 이해하는 데 필요한 derived functors의 개념을 다룰 것입니다. 또한, 이전 장에서 간단히 소개된 spectral sequences, derived categories, six operations 등에 대해 더 자세히 알아보겠습니다.

6.2 Čech Cohomology의 동기

Sheaf cohomology는 강력한 도구이지만, 실제로 계산하기는 어려울 수 있습니다. Čech cohomology는 이러한 계산을 더 쉽게 만드는 방법을 제공합니다 [BT13].

정의 6.1 (Čech Complex)**.** *위상공간 X 위의 sheaf $\mathcal{F}$와 open cover $\mathcal{U} = \{U_i\}$에 대해, Čech complex는 다음과 같이 정의됩니다:*

$$\begin{aligned}
C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) &= \prod_i \mathcal{F}(U_i) \\
C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) &= \prod_{i<j} \mathcal{F}(U_i \cap U_j) \\
C^2(\mathcal{U}, \mathcal{F}) &= \prod_{i<j<k} \mathcal{F}(U_i \cap U_j \cap U_k) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

일반적으로: $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i_0<\cdots<i_p} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p})$

이 complex의 cohomology가 바로 Čech cohomology입니다:

정의 6.2 (Čech Cohomology)**.** *Čech cohomology는 다음과 같이 정의됩니다:*

$$\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \frac{\ker(d : C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}))}{im(d : C^{p-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}))}$$

여기서 d는 Čech differential입니다.

Čech cohomology의 주요 장점은 계산이 상대적으로 쉽다는 것입니다. 그러나 이것이 실제로 우리가 원하는 sheaf cohomology와 같은지는 별도의 증명이 필요합니다.

6.3 Derived Functors

Derived functors는 정확하지 않은 functors를 "수정"하는 방법을 제공합니다. 이는 homological algebra의 핵심 도구 중 하나입니다 [?].

정의 6.3 (Right Derived Functor). *Left exact functor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ($\mathcal{A}$와 $\mathcal{B}$는 abelian categories) 에 대해, 그의 right derived functors $R^iF : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ($i \geq 0$)는 다음과 같이 정의됩니다:*

$A \in \mathcal{A}$에 대해 injective resolution을 취합니다:

$$0 \to A \to I^0 \to I^1 \to I^2 \to \cdots$$

그리고 $R^iF(A) = H^i(F(I^\bullet))$로 정의합니다.

Derived functors의 주요 특성은 다음과 같습니다:

- $R^0F = F$, 즉 0번째 derived functor는 원래의 functor와 같습니다.
- Short exact sequence $0 \to A \to B \to C \to 0$에 대해 long exact sequence를 생성합니다:

$$0 \to F(A) \to F(B) \to F(C) \to R^1F(A) \to R^1F(B) \to R^1F(C) \to R^2F(A) \to \cdots$$

- Injective object I에 대해 $R^iF(I) = 0$ for $i > 0$입니다.

6.4 Sheaf Cohomology via Derived Functors

이제 우리는 sheaf cohomology를 derived functors의 관점에서 정의할 수 있습니다 [Har77].

정의 6.4 (Sheaf Cohomology). *위상공간 X 위의 sheaf $\mathcal{F}$에 대해:*

$$H^i(X, \mathcal{F}) = R^i\Gamma(X, \mathcal{F})$$

여기서 $\Gamma(X, -)$는 global section functor입니다.

이 정의는 매우 추상적으로 보일 수 있지만, 다음과 같은 중요한 성질을 가집니다:

- $H^0(X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$, 즉 0번째 cohomology는 global sections입니다.
- Short exact sequence of sheaves $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$에 대해 long exact sequence in cohomology를 얻습니다.
- Injective sheaf $\mathcal{I}$에 대해 $H^i(X, \mathcal{I}) = 0$ for $i > 0$입니다.

6.5 Čech Cohomology와 Sheaf Cohomology의 관계

Čech cohomology와 sheaf cohomology는 밀접한 관련이 있습니다. 특정 조건 하에서 이 둘은 동일합니다 [BT13].

정리 6.5. *X가 paracompact이고 $\mathcal{F}$가 X 위의 sheaf일 때, 충분히 fine한 open cover $\mathcal{U}$에 대해:*

$$\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \cong H^p(X, \mathcal{F})$$

이 정리는 다음과 같은 중요성을 갖습니다:

- Čech cohomology를 통해 sheaf cohomology를 계산할 수 있게 해줍니다.
- 실제 계산에서 매우 유용합니다.

- Sheaf cohomology의 추상적 정의와 Čech cohomology의 구체적 계산 사이의 다리 역할을 합니다.

예 6.6 (원의 Čech Cohomology). *S^1을 단위원으로, $\mathcal{F}$를 S^1 위의 constant sheaf $\mathbb{R}$라고 합시다. S^1을 두 개의 open arc U_1과 U_2로 덮는 open cover $\mathcal{U}$를 고려합니다.*

Čech complex:

$$0 \to C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d} C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to 0$$

여기서:

- $C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(U_1) \oplus \mathcal{F}(U_2) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$
- $C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(U_1 \cap U_2) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ *(두 개의 연결 성분)*
- $d : C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$*는* $(a, b) \mapsto (a - b, b - a)$*로 주어집니다.*

따라서:

- $\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \ker(d) \cong \mathbb{R}$
- $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})/Im(d) \cong \mathbb{R}$

이는 $H^0(S^1, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$, $H^1(S^1, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$과 일치합니다.

6.6 Spectral Sequences

Spectral sequences는 복잡한 cohomological 계산을 단순화하는 강력한 도구입니다 [McC01].

정의 6.7 (Spectral Sequence). *Spectral sequence는 다음과 같은 데이터의 집합입니다:*

- *각 $r \geq 0$에 대해, bigraded objects의 family $\{E_r^{p,q}\}_{p,q \in \mathbb{Z}}$*
- *Differentials $d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$, $d_r \circ d_r = 0$*
- *Isomorphisms $E_{r+1}^{p,q} \cong H(E_r^{p,q})$*

Spectral sequences는 다음과 같은 방식으로 사용됩니다:

- 복잡한 cohomology 계산을 여러 단계로 나눕니다.
- 각 단계에서 differential을 계산하고, 그 결과를 다음 단계의 입력으로 사용합니다.
- 이 과정을 반복하여 최종적으로 원하는 cohomology group에 수렴합니다.

Spectral sequences는 복잡한 cohomological 계산을 여러 단계로 나누어 수행할 수 있게 해줍니다. 이는 특히 fibration이나 filtration이 있는 상황에서 유용합니다.

예 6.8 (Leray-Serre Spectral Sequence). *Fiber bundle $F \to E \to B$에 대해, Leray-Serre spectral sequence는 다음과 같습니다:*

$$E_2^{p,q} = H^p(B; \mathcal{H}^q(F)) \Rightarrow H^{p+q}(E)$$

여기서 $\mathcal{H}^q(F)$는 fiber F의 q번째 cohomology를 계수로 하는 B 위의 local system입니다.

이 spectral sequence를 사용하면, base space B와 fiber F의 cohomology 정보로부터 total space E의 cohomology를 계산할 수 있습니다.

Spectral sequences는 또한 derived functors 사이의 관계를 이해하는 데도 유용합니다.

예 6.9 (Grothendieck Spectral Sequence). *Functors $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$와 $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$가 주어졌을 때, 특정 조건 하에서 다음과 같은 spectral sequence가 존재합니다:*

$$E_2^{p,q} = (R^pF)(R^qG) \Rightarrow R^{p+q}(F \circ G)$$

이는 합성 functor의 derived functor를 각 functor의 derived functors로 표현할 수 있게 해줍니다.

6.7 Derived Categories

Derived categories는 homological algebra를 더 자연스럽게 다룰 수 있게 해주는 강력한 도구입니다 [KS05].

정의 6.10 (Derived Category). *Abelian category $\mathcal{A}$의 derived category $D(\mathcal{A})$는 다음과 같이 구성됩니다:*

- *Objects: $\mathcal{A}$의 complexes*
- *Morphisms: Chain maps의 localization (quasi-isomorphisms를 isomorphisms로 만듦)*

Derived category의 주요 특징은 다음과 같습니다:

- Complex들 사이의 quasi-isomorphism을 자연스럽게 다룰 수 있습니다.
- Derived functors를 더 자연스럽게 정의할 수 있습니다.
- Triangulated category의 구조를 가집니다.

예 6.11 (Derived Category에서의 Cohomology). *복합체 $A^\bullet$의 i번째 cohomology는 derived category에서 다음과 같이 표현됩니다:*

$$H^i(A^\bullet) \cong Hom_{D(\mathcal{A})}(k, A^\bullet[i])$$

여기서 k는 원래 category $\mathcal{A}$의 단위 객체입니다. $[i]$는 i만큼의 shift를 나타냅니다.

6.8 Grothendieck's Six Operations

Derived categories의 맥락에서 sheaves를 조작하는 강력한 도구로 알려진 "Grothendieck의 six operations" 또는 간단히 "six operations"는 다음과 같습니다:

- f_*: Direct image
- f^*: Inverse image
- $f_!$: Proper direct image (또는 Direct image with compact support)
- $f^!$: Exceptional inverse image
- $- \otimes^L -$: Derived tensor product
- $R\mathcal{H}om(-,-)$: Derived internal Hom

이들 operations는 다음과 같은 관계를 가집니다:

- (f^*, Rf_*)와 $(Rf_!, f^!)$는 각각 adjoint pair를 형성합니다
- $\otimes^L$과 $R\mathcal{H}om$도 adjoint pair입니다.
- Verdier duality는 이 operations들 사이의 깊은 관계를 나타냅니다.

예 6.12 (Proper Base Change Theorem). *다음과 같은 cartesian diagram이 있다고 가정합시다:*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & Y' \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

Proper base change theorem은 다음과 같은 isomorphism이 존재함을 말합니다:

$$g^* Rf_* \cong Rf'_* g'^*$$

이 정리는 fiber의 cohomology가 base의 변화에 따라 어떻게 변하는지를 이해하는 데 중요합니다. 특히, f가 proper map일 때 성립합니다.

6.9 결론

이 장에서 우리는 다음과 같은 주요 개념들을 살펴보았습니다:

- Čech cohomology와 그 계산 방법
- Derived functors와 그들이 sheaf cohomology를 정의하는 방법
- Čech cohomology와 sheaf cohomology의 관계
- Spectral sequences와 그 응용
- Derived categories의 심화 개념
- Grothendieck의 six operations와 그들 사이의 관계

이러한 도구들은 현대 대수기하학, 대수적 위상수학, 그리고 수리물리학 등 다양한 분야에서 중요하게 사용됩니다. 특히 이들은 복잡한 기하학적 대상의 구조를 이해하고 분석하는 데 필수적입니다.

다음 장에서는 이러한 개념들의 더 깊은 응용과 최근의 발전에 대해 알아보겠습니다. 특히, constructible sheaves와 perverse sheaves의 개념을 소개하고, 이들이 어떻게 특이점을 가진 공간의 연구에 사용되는지 살펴볼 것입니다.

Chapter 7

Constructible Sheaves

7.1 서론 및 역사적 배경

Constructible sheaves는 singular spaces를 연구하는 데 있어 근본적인 대상으로, topology와 algebraic geometry 사이의 간극을 메우는 역할을 합니다. 이들의 발전은 singular spaces의 맥락에서 manifolds의 중요한 성질들을 회복하기 위해 도입된 intersection homology의 역사와 밀접하게 연관되어 있습니다.

7.1.1 역사적 맥락

Intersection homology의 이야기는 1970년대 Mark Goresky와 Robert MacPherson이 singular spaces에 대한 Poincaré duality를 확장하려는 시도에서 시작됩니다. 그들의 동기는 Poincaré duality와 Lefschetz hyperplane theorem과 같은 algebraic topology의 많은 고전적 결과들이 singular varieties에서는 성립하지 않는다는 관찰에서 비롯되었습니다.

1974년, Goresky와 MacPherson는 Poincaré duality를 만족하는 singular spaces의 homology groups를 정의하는 방법으로 intersection homology를 도입했습니다. 핵심 아이디어는 space의 singular strata와 "perversity" 함수에 의해 인코딩된 방식으로 제어되어 교차하는 cycles만을 고려하는 것이었습니다.

7.1.2 Intersection Homology에서 Sheaf Theory로

Intersection homology의 초기 정의는 combinatorial한 것이었지만, 곧 sheaf-theoretic 접근이 더 강력할 것이라는 것이 분명해졌습니다. 이러한 전환은 주로 singular spaces를 연구하는 데 있어 local-to-global 원리의 필요성에 의해 동기부여되었습니다.

1980년대 초, Pierre Deligne는 intersection homology의 sheaf-theoretic 정의를 제안했습니다. 이 접근법은 Goresky와 MacPherson에 의해 1983년에 처음으로 출판되었습니다. Deligne의 아이디어는 특정 조건을 만족하는 complex of sheaves를 구성하는 것이었고, 이 complex의 hypercohomology가 intersection homology groups를 계산한다는 것이었습니다.

7.2 Stratifications와 Constructible Sheaves

Constructible sheaves를 정의하기 전에, 먼저 stratification의 개념을 소개해야 합니다.

정의 7.1 (Stratification). *위상공간 X의 stratification은 X의 부분집합들의 유한한 분할 $X = \bigcup_{i=0}^{n} X_i$로, 다음 조건을 만족합니다:*

- *각 X_i는 X의 locally closed subset입니다.*
- $\overline{X_i} \setminus X_i \subset \bigcup_{j<i} X_j$

각 X_i를 stratum이라고 부릅니다.

예 7.2. *$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$에 대해, 다음과 같은 stratification을 고려할 수 있습니다:*

- $X_0 = \{(0, 0)\}$ *(원점)*
- $X_1 = \{(x, 0) : x \neq 0\} \cup \{(0, y) : y \neq 0\}$ *(원점을 제외한 축들)*

이제 constructible sheaf를 정의할 수 있습니다:

정의 7.3 (Constructible Sheaf)**.** *X의 stratification $X = \bigcup_{i=0}^{n} X_i$에 대해, sheaf $\mathcal{F}$가 constructible 하다는 것은 각 stratum X_i 위에서 $\mathcal{F}$가 locally constant finite rank sheaf일 때를 말합니다.*

7.3 Constructible Sheaves의 성질

Constructible sheaves의 주요 성질:

- 특이점을 가진 공간에서도 잘 정의됩니다.
- 유한 차원의 cohomology를 가집니다.
- 많은 기하학적 상황에서 자연스럽게 등장합니다.
- Derived category에서 좋은 성질을 가집니다.

7.4 Constructible Sheaves의 Derived Category

Derived category는 복잡한 대수적 구조를 다루는 데 매우 유용한 도구입니다. Constructible sheaves의 derived category는 특히 중요합니다.

정의 7.4 (Derived Category of Constructible Sheaves)**.** *X 위의 constructible sheaves의 derived category $D_c^b(X)$는 다음과 같이 정의됩니다:*

- *Objects: X 위의 bounded constructible complexes*
- *Morphisms: Chain maps의 localization (quasi-isomorphisms를 isomorphisms로 만듦)*

$D_c^b(X)$의 주요 특징:

- Triangulated category 구조를 가집니다.
- Verdier duality가 잘 정의됩니다.
- Six operations (직접 이미지, 역상, proper 직접 이미지, 예외적 역상, 텐서곱, 내부 Hom)이 잘 작동합니다.

7.5 응용 및 최근 연구 동향

Constructible sheaves는 다양한 수학 분야에서 중요한 응용을 가집니다:

7.5.1 Intersection Cohomology

정의 7.5 (Intersection Cohomology)**.** *특이점을 가진 공간 X에 대해, intersection cohomology $IH^*(X)$는 X의 intersection complex IC_X의 hypercohomology로 정의됩니다.*

Intersection cohomology는 특이 공간에 대해 Poincaré duality와 같은 "좋은" 성질들을 제공합니다.

7.5.2 표현론

Constructible sheaves는 표현론에서도 중요한 역할을 합니다.

예 7.6 (Springer Resolution). *G를 복소 단순 대수군, $\mathcal{N}$을 G의 멱영부분다양체라고 합시다. Springer resolution $\pi : \widetilde{\mathcal{N}} \to \mathcal{N}$에 대해, $R\pi_*\mathbb{C}_{\widetilde{\mathcal{N}}}[\dim \mathcal{N}]$는 W-동변인 constructible sheaves의 직합으로 분해됩니다. 여기서 W는 G의 Weyl group입니다.*

7.5.3 Étale Cohomology

대수기하학에서 constructible sheaves는 étale cohomology 이론의 기초가 됩니다.

7.6 결론 및 향후 연구 방향

Constructible sheaves는 특이점을 가진 공간의 topology를 연구하는 강력한 도구입니다. 이들은 대수기하학, 표현론, 특이점 이론 등 다양한 분야에서 중요한 역할을 합니다. 특히 derived category of constructible sheaves는 이러한 연구를 더욱 체계적으로 수행할 수 있게 해줍니다.

향후 연구 방향으로는 다음과 같은 주제들이 있습니다:

- Mixed Hodge modules 이론과의 연관성
- Motivic sheaves 이론 발전
- ℓ-adic sheaves와 수론적 기하학에의 응용
- Categorical Khovanov homology 구성

이러한 연구들은 constructible sheaves 이론을 더욱 발전시키고, 수학의 여러 분야에 새로운 통찰을 제공할 것으로 기대됩니다.

Chapter 8

Perverse Sheaves: 정의, 예제, 그리고 응용

8.1 서론

Perverse sheaves는 특이 공간 위에서 정의된 특별한 종류의 sheaf complex입니다. 이들은 대수기하학, 표현론, 특이점 이론 등 다양한 분야에서 중요한 역할을 합니다. 이 장에서는 perverse sheaves의 정의, 성질, 예제, 그리고 응용에 대해 알아보겠습니다 [?].

8.2 배경: Triangulated Categories와 t-structures

Perverse sheaves를 이해하기 위해서는 먼저 triangulated category와 t-structure의 개념을 이해해야 합니다.

정의 8.1 (Triangulated Category)**.** *Additive category $\mathcal{T}$가 다음 구조와 공리를 만족할 때 triangulated category라고 합니다:*

- *자기동형 함자 $T : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ (translation 함자)*
- *Distinguished triangles $X \to Y \to Z \xrightarrow{+1}$ (여기서 $\xrightarrow{+1}$는 T를 나타냄)*
- *특정 공리들 (TR1-TR4)을 만족*

Triangulated category의 중요한 예로는 chain complexes의 derived category가 있습니다.

예 8.2. *Abelian category $\mathcal{A}$의 bounded derived category $D^b(\mathcal{A})$는 triangulated category입니다. 여기서 objects는 $\mathcal{A}$의 bounded complexes이고, morphisms는 chain maps의 localization(quasi-isomorphisms를 isomorphisms로 만듦)입니다.*

정의 8.3 (t-structure)**.** *Triangulated category $\mathcal{D}$의 t-structure는 full subcategories $\mathcal{D}^{\leq 0}$와 $\mathcal{D}^{\geq 0}$의 쌍으로, 다음 조건들을 만족합니다:*

- $\mathcal{D}^{\leq 0}[1] \subset \mathcal{D}^{\leq 0}$, $\mathcal{D}^{\geq 0}[-1] \subset \mathcal{D}^{\geq 0}$
- $Hom_{\mathcal{D}}(X, Y) = 0$ *for* $X \in \mathcal{D}^{\leq 0}$, $Y \in \mathcal{D}^{\geq 1}$
- *모든 $X \in \mathcal{D}$에 대해, $X^{\leq 0} \to X \to X^{\geq 1} \xrightarrow{+1}$인 distinguished triangle이 존재 (여기서 $X^{\leq 0} \in \mathcal{D}^{\leq 0}$, $X^{\geq 1} \in \mathcal{D}^{\geq 1}$)*

t-structure의 중요성은 그것이 triangulated category 안에서 "cohomology"의 개념을 정의할 수 있게 해준다는 점입니다.

8.3 Perversity Function과 Perverse Sheaves

Perverse sheaves를 정의하기 위해서는 먼저 perversity function의 개념을 이해해야 합니다.

정의 8.4 (Perversity Function). *Stratified space* $X = \bigcup X_i$*에 대해, perversity function* p*는 각 stratum* X_i*에 정수를 할당하는 함수로, 다음 조건을 만족합니다:*

- $p(X_i) \leq p(X_j)$ *if* $X_i \subset \overline{X_j}$
- $p(X_i) \leq \dim X_i$

가장 흔히 사용되는 perversity function은 "middle perversity"로, $p(X_i) = \frac{1}{2} \dim X_i$로 정의됩니다.

이제 perverse sheaf를 정의할 수 있습니다:

정의 8.5 (Perverse Sheaf). *복소 대수다양체* X *위의 bounded constructible complex* $\mathcal{F}^\bullet$*가 다음 조건을 만족할 때 (middle) perverse sheaf라고 합니다:*

- $\dim supp \mathcal{H}^i(\mathcal{F}^\bullet) \leq -i$ *for all* i
- $\dim supp \mathcal{H}^i(\mathbb{D}\mathcal{F}^\bullet) \leq -i$ *for all* i

여기서 $\mathbb{D}$*는 Verdier duality functor입니다.*

이 정의는 t-structure의 관점에서도 이해할 수 있습니다. Perverse sheaves는 특정 t-structure에 대한 "heart"를 형성합니다.

예 8.6 (Constant Sheaf on a Smooth Variety). X*가 smooth variety이고* $\dim X = n$*일 때,* $\mathbb{C}_X[n]$*은 perverse sheaf입니다.*

예 8.7 (Skyscraper Sheaf). *점* $x \in X$*에 대해, skyscraper sheaf* $\mathbb{C}_x$*는 perverse sheaf입니다.*

8.4 Intersection Complex

Perverse sheaves의 가장 중요한 예 중 하나는 intersection complex입니다.

정의 8.8 (Intersection Complex). *Irreducible variety* X*와 그의 smooth part* U*에 대해,* X*의 intersection complex* IC_X*는 다음 조건을 만족하는 perverse sheaf입니다:*

- $IC_X|_U \cong \mathbb{C}_U[\dim X]$
- $\dim supp \mathcal{H}^i(IC_X) < -i$ *for* $i > -\dim X$
- $\dim supp \mathcal{H}^i(\mathbb{D}IC_X) < -i$ *for* $i > -\dim X$

예 8.9 (Intersection Complex of a Nodal Curve). X*를 nodal curve* $y^2 = x^2(x+1)$*라고 합시다.* X*의 intersection complex* IC_X*는 다음과 같이 구성됩니다:*

- *Smooth part에서는* $\mathbb{C}[1]$*과 같습니다.*
- *Node에서는 더 복잡한 구조를 가지며, 이 점에서의 local cohomology는* $\mathbb{C}$*입니다.*

8.5 Perverse Sheaves의 성질

Perverse sheaves의 주요 성질:

정리 8.10. *Perverse sheaves의 category* $Perv(X)$*는 abelian category입니다.*

정리 8.11 (Self-Duality). $\mathcal{F}^\bullet$*가 perverse sheaf이면, 그의 Verdier dual* $\mathbb{D}\mathcal{F}^\bullet$*도 perverse sheaf입니다.*

8.6 Decomposition Theorem

Perverse sheaves의 가장 중요한 성질 중 하나는 decomposition theorem입니다.

정리 8.12 (Decomposition Theorem)**.** *$f : X \to Y$를 proper morphism이라고 할 때, Rf_*IC_X는 perverse sheaves의 direct sum으로 분해됩니다:*
$Rf_*IC_X \cong \bigoplus_i {}^p\mathcal{H}^i(Rf_*IC_X)[-i]$
여기서 ${}^p\mathcal{H}^i$는 perverse cohomology functor입니다.

8.7 Perverse Sheaves와 D-modules

Perverse sheaves는 D-modules와 깊은 관련이 있습니다. 이 관계는 Riemann-Hilbert correspondence로 알려져 있습니다.

정리 8.13 (Riemann-Hilbert Correspondence)**.** *복소 다양체 X에 대해, 다음의 equivalence가 성립합니다:*
$Perv(X) \cong Mod_{rh}(\mathcal{D}_X)$
여기서 $Mod_{rh}(\mathcal{D}_X)$는 regular holonomic D-modules의 category입니다.

8.8 결론

이 장에서 우리는 perverse sheaves의 기본 개념과 성질, 그리고 중요한 예제들을 살펴보았습니다. Perverse sheaves는 특이점을 가진 공간의 topology를 연구하는 강력한 도구이며, 대수기하학, 표현론, 특이점 이론 등 다양한 분야에서 중요한 역할을 합니다.

다음 장에서는 perverse sheaves의 더 구체적인 응용과 계산 방법에 대해 알아보겠습니다.

Chapter 9

Perverse Sheaves: 예제와 응용

9.1 Introduction

이전 장에서 우리는 perverse sheaves의 기본 개념을 살펴보았습니다. 이번 장에서는 perverse sheaves의 더 깊이 있는 예제와 다양한 응용을 알아보겠습니다. 특히, intersection cohomology, Decomposition Theorem, 그리고 표현론에서의 응용에 초점을 맞추겠습니다 [?].

9.2 Perverse Sheaves의 구체적 예시

9.2.1 Smooth Case

예 9.1 (Constant Sheaf on a Smooth Variety)**.** *X가 smooth variety이고 $\dim X = n$일 때, $\mathbb{C}_X[n]$은 perverse sheaf입니다. 이를 더 자세히 살펴보겠습니다:*

- $\mathcal{H}^i(\mathbb{C}_X[n]) = 0$ *for* $i \neq -n$
- $\mathcal{H}^{-n}(\mathbb{C}_X[n]) = \mathbb{C}_X$*는 n차원 지지집합을 가집니다.*
- *Verdier dual:* $\mathbb{D}(\mathbb{C}_X[n]) \cong \mathbb{C}_X[n]$

이 예제는 smooth variety에서 perverse sheaf가 어떻게 나타나는지 보여줍니다. 특히, 차원에 따른 shift가 중요한 역할을 합니다.

9.2.2 Singular Case

예 9.2 (Intersection Complex)**.** *X를 특이점을 가진 irreducible variety라고 합시다. $j : U \hookrightarrow X$를 smooth part의 inclusion이라고 할 때, X의 intersection complex IC_X는 다음과 같이 정의됩니다:*
$IC_X = j_{!*}(\mathbb{C}_U[\dim X])$
IC_X의 주요 특성:

- $IC_X|_U \cong \mathbb{C}_U[\dim X]$
- $\dim supp\mathcal{H}^i(IC_X) < -i$ *for* $i > -\dim X$
- $\dim supp\mathcal{H}^i(\mathbb{D}IC_X) < -i$ *for* $i > -\dim X$

Intersection complex는 특이점을 가진 공간의 topology를 연구하는 데 매우 중요한 도구입니다. 이는 특이점 주변의 정보를 "적절하게" 제어하면서, smooth part의 정보를 전체 공간으로 확장합니다.

예 9.3 (Intersection Complex of a Curve with a Node)**.** *X를 node를 가진 평면 곡선 $y^2 = x^2(x+1)$이라고 합시다. X의 intersection complex IC_X는 다음과 같은 특성을 가집니다:*

- *Smooth part에서:* $IC_X|_{X\setminus\{0\}} \cong \mathbb{C}_{X\setminus\{0\}}[1]$
- *Node에서:* $\mathcal{H}^{-1}(IC_X)_0 \cong \mathbb{C}$, $\mathcal{H}^0(IC_X)_0 = 0$

이 예제는 특이점(node)에서 intersection complex가 어떻게 동작하는지 보여줍니다. 특이점에서 $\mathcal{H}^0$*이 사라지는 것이 특징적입니다.*

9.3 Nearby and Vanishing Cycles

Nearby cycles와 vanishing cycles는 perverse sheaves의 맥락에서 매우 중요한 개념입니다.

정의 9.4 (Nearby and Vanishing Cycles). $f : X \to \mathbb{C}$*를 복소 대수다양체에서 정의된 함수라고 합시다. 이때 nearby cycle functor* ψ_f*와 vanishing cycle functor* ϕ_f*를 정의할 수 있습니다:*

- $\psi_f : D^b_c(X) \to D^b_c(X_0)$
- $\phi_f : D^b_c(X) \to D^b_c(X_0)$

여기서 $X_0 = f^{-1}(0)$*입니다.*

정리 9.5. *만약* $\mathcal{F}$*가 perverse sheaf라면,* $\psi_f\mathcal{F}$*와* $\phi_f\mathcal{F}$*도 perverse sheaf입니다.*

이 정리는 perverse sheaves의 category가 nearby cycles와 vanishing cycles 연산 하에서 닫혀있음을 보여줍니다. 이는 특이점 이론에서 매우 중요한 성질입니다.

예 9.6 (Nearby and Vanishing Cycles for a Node). $f(x, y) = y^2 - x^2$ *를 생각해봅시다. 이는 원점에 node를 가진 곡선을 정의합니다.* $\mathcal{F} = \mathbb{C}_X[1]$ *(차원이 1이므로 1만큼 shift)에 대해:*

- $\psi_f\mathcal{F}$ *는 원점에서 계수가 2인 skyscraper sheaf입니다.*
- $\phi_f\mathcal{F}$ *는 원점에서 계수가 1인 skyscraper sheaf입니다.*

이 예제는 node 특이점에서 nearby cycles와 vanishing cycles가 어떻게 작동하는지 보여줍니다. Nearby cycles는 "가까운" 점들의 정보를, vanishing cycles는 "사라지는" 정보를 포착합니다.

9.4 Decomposition Theorem

Decomposition theorem은 perverse sheaves 이론의 가장 중요한 결과 중 하나입니다.

정리 9.7 (Decomposition Theorem). $f : X \to Y$*를 proper morphism이라고 할 때,* Rf_*IC_X*는 다음과 같이 분해됩니다:*
$Rf_*IC_X \cong \bigoplus_i {}^p\mathcal{H}^i(Rf_*IC_X)[-i]$
여기서 ${}^p\mathcal{H}^i$*는 perverse cohomology functor입니다.*

이 정리의 기하학적 의미:

- 복잡한 대수다양체의 topology를 더 단순한 조각들로 분해할 수 있습니다.
- 각 조각 ${}^p\mathcal{H}^i(Rf_*\mathrm{IC}_X)$는 Y의 특정 부분집합 위에 집중된 perverse sheaf입니다.
- 이 분해는 X의 기하학적 구조에 대한 정보를 Y 위의 더 단순한 대상들로 번역합니다.

예 9.8 (Decomposition for a Resolution of Singularities). X*가 node 하나를 가진 곡선이고,* $f : \tilde{X} \to X$*가 그 특이점의 resolution이라고 합시다. 이 경우 decomposition theorem은 다음과 같은 분해를 제공합니다:*
$Rf_*\mathbb{C}_{\tilde{X}}[1] \cong IC_X \oplus \mathbb{C}_p$
여기서 p*는 node입니다. 이 분해는 resolution에 의해 추가된 정보(*$\mathbb{C}_p$*)와 원래 곡선의 topology(*IC_X*)를 명확히 구분합니다.*

예 9.9 (Decomposition for a Resolution of Singularities)**.** *$f : \widetilde{X} \to X$를 특이점 해소라고 할 때, decomposition theorem은 다음과 같은 분해를 제공합니다:*
$Rf_*\mathbb{C}_{\widetilde{X}}[\dim X] \cong IC_X \oplus \bigoplus_i \mathcal{F}_i$
여기서 $\mathcal{F}_i$는 X의 특이점들 위에서 지지되는 perverse sheaves입니다.

9.5 Applications in Representation Theory

Perverse sheaves는 표현론에서 매우 중요한 역할을 합니다. 특히 Springer theory에서 핵심적입니다.

정리 9.10 (Springer Correspondence)**.** *G를 복소 단순 대수군, $\mathcal{N}$을 G의 멱영부분다양체라고 합시다. 이때 다음의 동형이 성립합니다:*
$Perv_G(\mathcal{N}) \cong Rep(W)$
여기서 $Perv_G(\mathcal{N})$는 G-동변인 perverse sheaves의 category이고, $Rep(W)$는 Weyl group W의 표현들의 category입니다.

이 대응의 기하학적 의미:

- Weyl group의 표현들을 멱영다양체 위의 perverse sheaves로 실현할 수 있습니다.
- 이는 대수적 대상(Weyl group의 표현)과 기하학적 대상(perverse sheaves) 사이의 깊은 연관성을 보여줍니다.
- 이를 통해 표현론의 많은 문제들을 기하학적 방법으로 접근할 수 있게 됩니다.

예 9.11 (Springer Correspondence for SL_2)**.** *$G = SL_2(\mathbb{C})$의 경우를 고려해봅시다. 이때:*

- *$\mathcal{N}$ 은 2차 nilpotent 행렬들의 집합으로, 복소 평면과 동형입니다.*
- *Weyl group W 는 2차 대칭군 S_2 입니다.*
- *Springer correspondence는 다음을 제공합니다:*
  - *S_2의 trivial 표현 $\leftrightarrow IC_{\mathcal{N}}$*
  - *S_2의 sign 표현 $\leftrightarrow IC_{\{0\}}$*

이 예제는 간단한 경우에서 Springer correspondence가 어떻게 작동하는지 보여줍니다. 복잡한 군에 대해서는 이 대응이 더욱 풍부해집니다.

9.6 D-modules and the Riemann-Hilbert Correspondence

Perverse sheaves는 D-modules 이론과 깊은 관련이 있습니다. 이 관계는 Riemann-Hilbert correspondence로 알려져 있습니다.

정리 9.12 (Riemann-Hilbert Correspondence)**.** *복소 대수다양체 X에 대해, 다음의 equivalence가 성립합니다:*
$Perv(X) \cong Mod_{rh}(\mathcal{D}_X)$
여기서 $Mod_{rh}(\mathcal{D}_X)$는 regular holonomic D-modules의 category입니다.

이 대응의 의미와 응용:

- 미분방정식의 해의 monodromy를 perverse sheaves를 통해 기하학적으로 이해할 수 있습니다.
- 대수적 D-module 이론의 결과를 위상적 설정으로 옮길 수 있습니다.

- 이를 통해 특이점 이론, 표현론, 대수기하학 등 다양한 분야에서 새로운 통찰을 얻을 수 있습니다.

예 9.13 (Connection과 Perverse Sheaf)**.** *X 위의 flat connection (E, ∇)에 대해, 대응되는 perverse sheaf는 $DR(E, \nabla)[\dim X]$ 입니다. 여기서 DR은 de Rham complex를 나타냅니다.*

예 9.14 (Riemann-Hilbert Correspondence for Fuchsian Equation)**.** *$X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 에서 정의된 Fuchsian 방정식 $x\frac{d}{dx}y = \alpha y$ 를 고려해봅시다.*

- *D-module 측면: 이 방정식은 $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X/(x\frac{d}{dx} - \alpha)$ 로 표현됩니다.*
- *Perverse sheaf 측면: 대응되는 perverse sheaf는 $\mathcal{L}_\alpha[1]$ 입니다. 여기서 $\mathcal{L}_\alpha$ 는 monodromy $e^{2\pi i\alpha}$ 를 가진 rank 1 local system입니다.*

이 예제는 구체적인 미분방정식이 어떻게 perverse sheaf로 해석되는지 보여줍니다.

9.7 결론

이 장에서 우리는 다음과 같은 주요 개념들을 살펴보았습니다:

- Perverse sheaves의 구체적인 예시들
- Nearby cycles와 vanishing cycles
- Decomposition theorem과 그 기하학적 의미
- Springer correspondence를 통한 표현론에서의 응용
- Riemann-Hilbert correspondence와 D-modules와의 관계

Perverse sheaves는 대수기하학, 특이점 이론, 표현론 등 다양한 분야에서 중요한 역할을 합니다. 이들은 특히 특이점을 가진 공간의 topology를 연구하는 강력한 도구를 제공하며, 다양한 수학적 구조들 사이의 깊은 연관성을 밝혀냅니다.

9.8 현재 연구 동향과 열린 문제들

Perverse sheaves 이론은 여전히 활발히 연구되고 있는 분야입니다. 현재의 주요 연구 방향과 열린 문제들을 살펴보겠습니다:

9.8.1 Mixed Hodge Modules

- M. Saito가 개발한 mixed Hodge modules 이론은 perverse sheaves의 Hodge 이론적 일반화입니다.
- 현재 연구: Mixed Hodge modules의 범주적 구조와 그 응용에 대한 연구가 진행 중입니다.
- 열린 문제: Mixed Hodge modules의 explicit 계산 방법 개발, 대수다양체의 cohomology의 Hodge 구조 연구 등.

9.8.2 Motivic Perverse Sheaves

- 목표: 동기적 호몰로지 이론의 맥락에서 perverse sheaves를 정의하는 것.
- 현재 연구: A. Beilinson, J. Ayoub 등이 이 방향의 연구를 진행 중입니다.
- 열린 문제: Motivic perverse sheaves의 category 구성, 그리고 이를 이용한 motivic Decomposition Theorem의 증명.

9.8.3 ℓ-adic Perverse Sheaves

- ℓ-adic perverse sheaves는 수론적 기하에서 중요한 역할을 합니다.
- 현재 연구: Langlands 프로그램과의 연관성, 모듈러 곡선의 cohomology 연구 등.
- 열린 문제: ℓ-adic perverse sheaves를 이용한 Ramanujan 합동성의 일반화, 모티브와의 관계 등.

9.8.4 Categorical Khovanov Homology

- 목표: Perverse sheaves를 이용하여 Khovanov homology의 범주화 구성.
- 현재 연구: R. Bezrukavnikov, I. Losev 등이 이 방향의 연구를 진행 중입니다.
- 열린 문제: 이 구성의 기하학적 해석, 다른 매듭 불변량과의 관계 등.

9.9 최종 결론

Perverse sheaves는 현대 수학의 여러 분야를 연결하는 강력한 도구입니다. 이들은 구체적인 문제 해결 능력과 추상적 사고 능력을 동시에 요구하며, 수학의 다양한 분야에 새로운 통찰을 제공합니다. 앞으로의 연구는 이 이론을 더욱 발전시키고, 새로운 응용 분야를 개척할 것으로 기대됩니다.

Chapter 10

Riemann-Hilbert 대응

10.1 서론

Riemann-Hilbert 대응은 D-module 이론과 perverse sheaf 이론을 연결하는 심오한 결과입니다. 이 대응은 미분방정식과 그 해에 대한 대수적 접근과 위상적 접근 사이의 강력한 연결고리를 제공합니다. 이 장에서는 D-module의 기초부터 시작하여 Riemann-Hilbert 대응의 statement와 그 함의까지 탐구해 볼 것입니다.

10.2 D-modules

10.2.1 D-module의 정의

X를 smooth complex algebraic variety(또는 complex manifold)라고 합시다. $\mathcal{O}_X$를 X 위의 regular function들의 sheaf라 하고, $\mathcal{T}_X$를 X 위의 vector field들의 sheaf라고 합시다.

정의 10.1 (Sheaf of differential operators)**.** *X 위의 differential operator들의 sheaf $\mathcal{D}_X$는 $End_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X)$의 subalgebra로 정의되며, $\mathcal{O}_X$와 $\mathcal{T}_X$에 의해 생성되고 다음 관계를 만족합니다:*

- *$f, g \in \mathcal{O}_X$와 $\xi \in \mathcal{T}_X$에 대해:*
  - $[f, g] = 0$
  - $[\xi, f] = \xi(f)$
  - $[\xi, \eta] = \xi \circ \eta - \eta \circ \xi$ *($\eta \in \mathcal{T}_X$일 때)*

정의 10.2 (D-module)**.** *X 위의 D-module은 left $\mathcal{D}_X$-module들의 sheaf $\mathcal{M}$입니다. 즉, 각 open set $U \subset X$에 대해, $\mathcal{M}(U)$는 ring $\mathcal{D}_X(U)$ 위의 left module이며, 이 module 구조는 restriction map들과 compatible합니다.*

10.2.2 Local coordinates를 사용한 D-module의 정의

$\mathbb{R}^n$ (또는 $\mathbb{C}^n$)의 open subset U에서 local coordinates $(x_1, \ldots, x_n)$를 사용하여 D-module을 다음과 같이 정의할 수 있습니다:

정의 10.3 (D-module in local coordinates)**.** *$U \subset \mathbb{R}^n$의 D-module $\mathcal{M}$은 다음과 같은 작용을 가진 $\mathcal{O}_U$-module입니다:*

- *각 $i = 1, \ldots, n$에 대해, $\partial_{x_i} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$가 존재하여*
- $\partial_{x_i}(fm) = f\partial_{x_i}(m) + \frac{\partial f}{\partial x_i} m$
- $[\partial_{x_i}, \partial_{x_j}] = 0$

여기서 $f \in \mathcal{O}_U$, $m \in \mathcal{M}$입니다.

이 정의는 D-module이 어떻게 미분 연산자의 작용을 포함하는지를 더 구체적으로 보여줍니다.

10.2.3 D-module의 예시

예 10.4 (Structure sheaf). *Structure sheaf $\mathcal{O}_X$는 자연스러운 $\mathcal{D}_X$-module 구조를 가집니다. 여기서 vector field들은 derivation으로 작용합니다.*

예 10.5 (Exponential D-module). *$X = \mathbb{C}$에서, D-module $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X(z\partial_z - 1)$를 고려해봅시다. 이 D-module은 미분방정식 $z\frac{d}{dz}f = f$를 만족하는 exponential function e^z에 대응됩니다.*

예 10.6 (Fuchsian D-module). *$X = \mathbb{P}^1$에서, D-module $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X(z(z-1)\partial_z - \lambda)$를 고려해봅시다 ($\lambda \in \mathbb{C}$). 이 D-module은 hypergeometric 미분방정식 $z(z-1)\frac{d}{dz}f = \lambda f$에 대응됩니다.*

10.3 De Rham Functor

De Rham functor는 Riemann-Hilbert 대응에서 핵심적인 역할을 합니다. 이 functor는 여러 가지 동등한 방식으로 정의될 수 있으며, 각각은 D-module과 sheaf 사이의 관계에 대한 다른 관점을 제공합니다.

10.3.1 De Rham Functor: 버전 1

정의 10.7 (De Rham Functor via RHom). *De Rham functor* DR : $D^b(\mathcal{D}_X\text{-}Mod) \to D^b(Sh(X))$*는 다음과 같이 정의됩니다:*
$\mathrm{DR}(\mathcal{M}) = RHom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{M})[\dim X]$
여기서 $[\dim X]$*는 complex를* $\dim X$ *만큼 shift함을 나타냅니다.*

10.3.2 De Rham Functor: 버전 2

정의 10.8 (De Rham Functor via Tensor Product). *De Rham functor는 다음과 같이 정의될 수도 있습니다:*
$\mathrm{DR}(\mathcal{M}) = (\Omega_X^\bullet \otimes^L_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M})[\dim X]$
여기서 $\Omega_X^\bullet$는 X 위의 differential form들의 de Rham complex입니다.

이 두 정의는 derived category에서 다음과 같은 isomorphism으로 인해 동등합니다:
$\mathrm{RHom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{M}) \cong \Omega_X^\bullet \otimes^L_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$

10.3.3 De Rham Functor: 버전 3

정의 10.9 (De Rham Functor for Right D-modules). *Smooth complex algebraic variety X에 대해, right D-module들에 대한 De Rham functor는 다음과 같이 정의됩니다:*
$\mathrm{DR}(\mathcal{M}) = \Omega_X^\bullet \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}$
여기서 $\Omega_X^\bullet$는 right $\mathcal{D}_X$-module로 간주된 X 위의 differential form들의 de Rham complex입니다.

Left D-module $\mathcal{M}$에 대해, 다음 관계가 성립합니다:
$\mathrm{DR}(\mathcal{M}) \simeq (\Omega_X^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M})[\dim X]$
이는 이 버전을 이전 버전들과 연결합니다.

10.4 Riemann-Hilbert 대응

이제 이 장의 핵심인 Riemann-Hilbert 대응에 대해 알아보겠습니다. 이 깊은 결과는 특정 D-module의 category와 constructible sheaf의 category 사이의 동등성을 확립합니다.

10.4.1 대응의 Statement

정리 10.10 (Riemann-Hilbert 대응)**.** *X를 smooth complex algebraic variety라고 합시다. 다음과 같은 category 동등성이 존재합니다:*

$\mathrm{DR} : D^b_{rh}(\mathcal{D}_X) \xrightarrow{\sim} D^b_c(X, \mathbb{C})$

여기서 $D^b_{rh}(\mathcal{D}_X)$는 X 위의 regular holonomic D-module들의 bounded derived category이고, $D^b_c(X, \mathbb{C})$는 X 위의 constructible sheaf들의 bounded derived category입니다.

더욱이, 이 동등성은 다음과 같은 동등성으로 제한됩니다:

$\mathrm{DR} : Mod_{rh}(\mathcal{D}_X) \xrightarrow{\sim} Perv(X)$

여기서 $Mod_{rh}(\mathcal{D}_X)$는 regular holonomic D-module들의 category이고 $Perv(X)$는 X 위의 perverse sheaf들의 category입니다.

10.4.2 De Rham 정리와의 관계

De Rham 정리는 Riemann-Hilbert 대응의 특별한 경우로 볼 수 있습니다. 이 관계를 더 자세히 살펴보겠습니다:

정리 10.11 (Riemann-Hilbert 대응을 통한 De Rham 정리)**.** *Smooth complex algebraic variety X에 대해, 다음이 성립합니다:*

$H^i_{dR}(X) \cong H^i(X, \mathbb{C})$

이 동형은 Riemann-Hilbert 대응에서 DR을 structure sheaf $\mathcal{O}_X$에 적용하여 얻을 수 있습니다:

$\mathrm{DR}(\mathcal{O}_X) \simeq \mathbb{C}_X[\dim X]$

여기서 $\mathbb{C}_X[\dim X]$는 X 위의 constant sheaf를 X의 차원만큼 shift한 것으로, perverse sheaf입니다.

이 정리의 의미를 더 자세히 설명하면:

1. $H^i_{dR}(X)$는 X의 de Rham cohomology로, differential form을 사용하여 정의됩니다. 2. $H^i(X, \mathbb{C})$는 X의 singular cohomology로, 위상적인 방법으로 정의됩니다. 3. 이 두 cohomology가 동형이라는 것은 미분기하학적 정보와 위상적 정보가 일치한다는 것을 의미합니다. 4. Riemann-Hilbert 대응은 이 관계를 더 일반적인 맥락에서 설명합니다: $\mathcal{O}_X$라는 D-module이 $\mathbb{C}_X[\dim X]$라는 perverse sheaf에 대응된다는 것입니다.

이는 Riemann-Hilbert 대응이 어떻게 smooth variety의 미분형식과 위상 사이의 관계에 대한 우리의 이해를 일반화하고 심화시키는지 보여줍니다.

10.5 구체적인 계산과 추가 개념

Riemann-Hilbert 대응의 힘을 보여주기 위해, 구체적인 계산 예시를 살펴보고 관련된 개념들을 소개하겠습니다.

10.5.1 $f = z^n$에 대한 계산

함수 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$를 $f(z) = z^n$ (n은 양의 정수)으로 정의합시다.

예 10.12 (Structure Sheaf의 Derived Direct Image)**.** *$Rf_*\mathcal{O}_\mathbb{C}$를 고려해봅시다. 이는 다음과 같이 계산됩니다:*

- *$\mathbb{C} \setminus \{0\}$에서, f는 degree n의 covering map입니다. 따라서, $Rf_*\mathcal{O}_\mathbb{C}|_{\mathbb{C}\setminus\{0\}} \cong \mathcal{O}^n_{\mathbb{C}\setminus\{0\}}$ 입니다.*
- *0에서, stalk $(Rf_*\mathcal{O}_\mathbb{C})_0$를 고려해야 합니다. 이는 $\mathbb{C}[[z]]$, 즉 z의 formal power series ring과 isomorphic합니다.*

따라서, $Rf_*\mathcal{O}_\mathbb{C}$는 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$에서 rank n의 locally free sheaf이고, 0에서 stalk이 $\mathbb{C}[[z]]$인 sheaf입니다.

예 10.13 (Constant Sheaf의 Derived Direct Image)**.** *이제 $Rf_*\mathbb{C}_\mathbb{C}$를 계산해봅시다:*

- $\mathbb{C} \setminus \{0\}$*에서, f는 degree n의 covering map입니다. 따라서, $Rf_*\mathbb{C}_\mathbb{C}|_{\mathbb{C}\setminus\{0\}} \cong \mathbb{C}^n_{\mathbb{C}\setminus\{0\}}$ 입니다.*
- 0*에서, stalk $(Rf_*\mathbb{C}_\mathbb{C})_0$를 고려해야 합니다. 이는 $\mathbb{C}^n$과 isomorphic합니다.*

따라서, $Rf_*\mathbb{C}_\mathbb{C}$는 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$에서 rank n의 local system이고, 0에서 rank n의 skyscraper sheaf로 확장됩니다.

10.5.2 Riemann-Hilbert 대응에서의 관계

위의 두 계산 결과는 Riemann-Hilbert 대응 관계에 있습니다:

1. $\mathcal{O}_\mathbb{C}$는 D-module입니다. 2. $\mathbb{C}_\mathbb{C}[\dim \mathbb{C}] = \mathbb{C}_\mathbb{C}[1]$은 이에 대응하는 perverse sheaf입니다. 3. f_*는 D-module 측면에서 $Rf_*\mathcal{O}_\mathbb{C}$를 만들어내고, perverse sheaf 측면에서 $Rf_*\mathbb{C}_\mathbb{C}[1]$를 만들어냅니다. 4. 이 두 결과물은 Riemann-Hilbert 대응 하에서 서로 대응됩니다.

이는 Riemann-Hilbert 대응이 어떻게 함수의 push-forward 연산 하에서도 보존되는지를 보여줍니다.

10.6 D-module 버전의 Six Functors

Grothendieck의 six functors formalism은 D-module의 맥락에서도 유사하게 존재합니다. 여기서는 $f : X \to Y$를 smooth varieties 사이의 morphism이라고 가정합니다.

1. **Direct image**: $f_+ : D^b(\mathcal{D}_X) \to D^b(\mathcal{D}_Y)$ $f_+\mathcal{M} = Rf_*(\mathcal{D}_{Y\leftarrow X} \otimes^L_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M})$

2. **Inverse image**: $f^+ : D^b(\mathcal{D}_Y) \to D^b(\mathcal{D}_X)$ $f^+\mathcal{N} = \mathcal{D}_{X\to Y} \otimes^L_{f^{-1}\mathcal{D}_Y} f^{-1}\mathcal{N}$

3. **Extraordinary inverse image**: $f^! : D^b(\mathcal{D}_Y) \to D^b(\mathcal{D}_X)$ $f^! = f^+[d_X - d_Y]$, 여기서 d_X와 d_Y는 각각 X와 Y의 차원입니다.

4. **Extraordinary direct image**: $f_! : D^b(\mathcal{D}_X) \to D^b(\mathcal{D}_Y)$ f 가 proper일 때, $f_! = f_+$

5. **Tensor product**: $\otimes^L_{\mathcal{D}_X} : D^b(\mathcal{D}_X) \times D^b(\mathcal{D}_X) \to D^b(\mathcal{D}_X)$

6. **Internal Hom**: $\mathrm{RHom}_{\mathcal{D}_X} : D^b(\mathcal{D}_X)^{op} \times D^b(\mathcal{D}_X) \to D^b(\mathcal{D}_X)$

이 functors는 Riemann-Hilbert 대응을 통해 constructible sheaf의 six functors와 대응됩니다. 이는 D-module 이론이 어떻게 대수기하학의 중요한 개념들을 포착하는지 보여줍니다.

Chapter 11

Sheaf Theory의 응용

11.1 Introduction

이 강의 시리즈의 마지막 장에서는 sheaf theory의 다양한 응용을 살펴보겠습니다. 지금까지 우리는 sheaves, presheaves, sheaf cohomology, constructible sheaves, perverse sheaves, 그리고 Riemann-Hilbert correspondence 등 sheaf theory의 주요 개념들을 학습했습니다. 이제 이러한 도구들이 어떻게 수학의 여러 분야에서 사용되는지 알아보겠습니다.

11.2 Algebraic Geometry

Sheaf theory는 대수기하학에서 핵심적인 역할을 합니다.

11.2.1 Coherent Sheaves and Serre Duality

정리 11.1 (Serre Duality). *X를 smooth projective variety라고 하면, 모든 coherent sheaf $\mathcal{F}$에 대해 다음이 성립합니다:*
$H^i(X, \mathcal{F}) \cong H^{n-i}(X, \mathcal{F}^* \otimes \omega_X)^*$
여기서 $n = \dim X$이고, ω_X는 canonical sheaf입니다.

이 정리는 sheaf cohomology의 중요한 duality 관계를 보여줍니다[Har77].

11.3 Topology

Sheaf theory는 위상수학에서도 중요한 응용을 가집니다.

11.3.1 De Rham's Theorem

정리 11.2 (De Rham's Theorem). *Compact, orientable smooth manifold M에 대해:*
$H^k_{dR}(M) \cong H^k(M; \mathbb{R})$

이 정리는 미분형식의 cohomology와 특이 cohomology 사이의 동형을 보여줍니다[BT13].

11.4 Complex Analysis

Sheaf theory는 복소해석학에서도 중요한 역할을 합니다.

11.4.1 Oka-Cartan Theory

정리 11.3 (Cartan's Theorem B). *X를 Stein manifold라고 하고, $\mathcal{F}$를 X 위의 coherent analytic sheaf라고 합시다. 그러면 모든 $q > 0$에 대해 $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$입니다.*

이 정리는 Stein 다양체 위에서 coherent sheaves의 higher cohomology가 사라짐을 보여줍니다[?].

11.5 Representation Theory

Sheaf theory, 특히 perverse sheaves는 표현론에서 중요한 응용을 가집니다.

11.5.1 Springer Theory

정리 11.4 (Springer Correspondence). *G를 복소 단순 대수군, $\mathcal{N}$을 G의 멱영부분다양체라고 합시다. 이때 다음의 동형이 성립합니다:*

$Perv_G(\mathcal{N}) \cong Rep(W)$

여기서 $Perv_G(\mathcal{N})$는 G-동변인 perverse sheaves의 category이고, $Rep(W)$는 Weyl group W의 표현들의 category입니다.

이 대응은 Lie 대수의 표현론과 Weyl group의 표현론을 연결짓는 중요한 결과입니다[?].

11.6 Number Theory

Sheaf theory는 수론에서도 중요한 응용을 가집니다.

11.6.1 Étale Cohomology and the Weil Conjectures

Étale cohomology는 Weil conjectures의 증명에 결정적인 역할을 했습니다. 이는 대수적 다양체의 점의 개수와 그 다양체의 위상적 성질 사이의 깊은 관계를 보여줍니다[?].

11.7 Conclusion

이 강의 시리즈를 통해 우리는 sheaf theory의 기본 개념부터 최신 연구 동향까지 폭넓게 살펴보았습니다. Sheaf theory는 현대 수학의 여러 분야를 연결짓는 강력한 언어이자 도구입니다. 이 이론은 대수기하학, 위상수학, 미분기하학 등 전통적인 수학 분야뿐만 아니라 물리학, 데이터 과학 등 다양한 분야에서도 중요한 역할을 하고 있습니다.

여러분이 이 강의를 통해 sheaf theory의 아름다움과 힘을 느끼셨기를 바랍니다. 이 이론은 여전히 활발히 연구되고 있으며, 많은 흥미로운 미해결 문제들이 남아있습니다.

Bibliography

[BT13] Raoul Bott and Loring W Tu. *Differential Forms in Algebraic Topology.* Springer Science & Business Media, 2013.

[Dim04] Alexandru Dimca. *Sheaves in topology.* Springer, 2004.

[GM13] Sergei I Gelfand and Yuri Ivanovich Manin. *Methods of homological algebra.* Springer, 2013.

[Gra14] Jeremy Gray. The history of sheaf theory. *Handbook of Teichmüller Theory*, pages 1–37, 2014.

[Gro60] Alexander Grothendieck. Eléments de géométrie algébrique: I. le langage des schémas. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 4:5–228, 1960.

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry.* Springer, 1977.

[Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, 2002.

[Ive86] Birger Iversen. *Cohomology of sheaves.* Springer, 1986.

[KS90] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira. *Sheaves on manifolds*, volume 292 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften.* Springer-Verlag, 1990.

[KS05] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira. *Categories and sheaves.* Springer, 2005.

[McC01] John McCleary. *A User's Guide to Spectral Sequences.* Cambridge University Press, 2001.

[ML98] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician.* Springer, 1998.